6.2 對數函數

在高中時，我們已熟悉以 $b(b>0, b\neq 1)$ 為底的指數函數 b^y，如 b^y 的值已知為 x，則 y 的值為 $\log_b x$。

定義 6.2

對於任意實數 $b>0, b\neq 1$ 我們定義

$$y=\log_b x \Leftrightarrow x=b^y \quad (x>0)$$

並稱 $\log_b x$ 為以 b 為底的對數函數。

例題五

解

(a) $\log_{10} 100=2 \quad (\because 10^2=100)$

(b) $\log_2 64=6 \quad (\because 2^6=64)$

(c) $\log_5\left(\frac{1}{625}\right)=-4 \quad \left(\because 5^{-4}=\frac{1}{625}\right)$

(d) $\log_7 1=0 \quad (\because 7^0=1)$

隨堂練習

試求下列之值：

(a) $\log_{10} 1000$

(b) $\log_3 \frac{1}{81}$

例題六

解下列方程式：

(a) $\log_3 x = 3$　　(b) $\log_{25} 5 = x$

(c) $\log_x 27 = 3$

解

(a) $\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 \Rightarrow x = 27$

(b) $\log_{25} 5 = x \Rightarrow 25^x = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(c) $\log_x 27 = 3 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$

隨堂練習

解下列方程式：

(a) $\log_9 x = \frac{1}{2}$　　(b) $\log_{81} 27 = x$

(c) $\log_x 125 = 3$

由定義 $y=\log_b x \Leftrightarrow x=b^y$ 可以推得

$$y=\log_b b^y\ (y\in\mathbb{R})\ \text{且}\ x=b^{\log_b x}\ (x>0)$$

由上式可知對數函數 $\log b^x$ 與指數函數 b^x 互為反函數。因此，對數函數 $\log_b x$ 的圖形可由指數函數 b^x 的圖形對直線 $y=x$ 作鏡射（也就是對稱於 $y=x$）得到

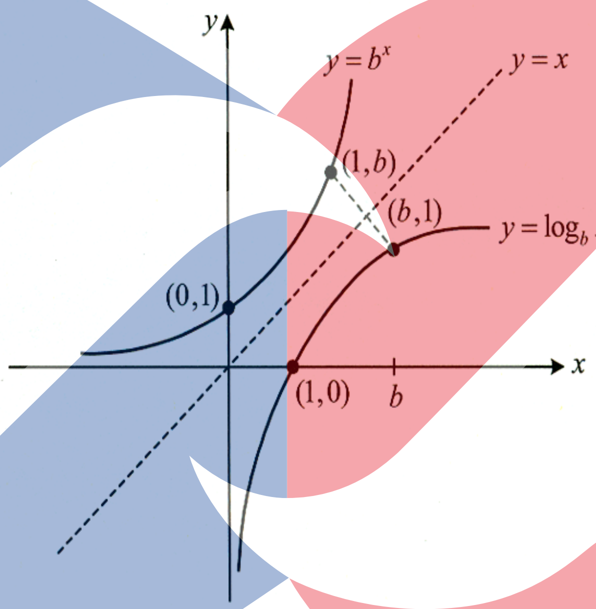

圖 6.3 $y=\log_b x$ 與 $y=b^x$ 的圖形彼此對 $y=x$ 直線對稱

由指數函數的性質可以推得對數函數的性質如下：

性質 6.2

設 $a,b>0,b\neq 1$，則 $\log_b 1=0,\log_b b=1$，而且若 $x,y>0$ 則

(1) $\log_b x=\log_b y \Leftrightarrow x=y$

(2) $\log_b xy=\log_b x+\log_b y$

(3) $\log_b x^r=r\log_b x$，其中 r 為任意實數

(4) $\log_b \dfrac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$

(5) $\log_b b^x=x$

例題七

解方程式 $\log_2(x+3)-\log_2(x-1)=1$

解

$\because \log_2(x+3)-\log_2(x-1)=1$

$\therefore \log_2\dfrac{x+2}{x-1}=1$

$\therefore \dfrac{x+3}{x-1}=2$

$x+3=2(x-1)$

$x=5$

隨堂練習

解方程式 $\log_3 x+\log_3(x+8)=2$ 。

在微積分中最常用的對數的底是 e，我們稱以 e 為底的對數 $\log_e x$ 為**自然對數** (natural logarithm) 並以 $\ln x$ 表示。也就是對於任意 $x>0$，

$$y=\ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

依此定義

$$y=\ln e^y \, (y\in\mathbb{R}) \text{ 且 } e^{\ln x}=x \, (x>0)$$

例題八

求下列各式的值：

(a) $\ln e$ (b) $\ln 1$

(c) $\ln \sqrt[3]{e}$

解

(a) $\ln e=\log_e e=1$

(b) $\ln 1=\log_e 1=0$

(c) $\ln \sqrt[3]{e}=\ln e^{1/3}=\log_e e^{1/3}=\dfrac{1}{3}$

對於自然對數，我們也有性質 6.2 的結果。設 $x,y>0$ 則

1. $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$
2. $\ln (xy)=\ln x+\ln y$
3. $\ln x^r = r\ln x$，其中 $r\in\mathbb{R}$
4. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

同時 $\ln 1=0$, $\ln e=1$。

例題九

解方程式 $e^{2x+5}=1$。

解

$\because e^{2x+5}=1$

$\therefore 2x+5=0$

$\therefore x=-\dfrac{5}{2}$

例題十

解方程式 $3\ln x = 2$ 。

解

$\because\ 3\ln x = 2$

$\therefore\ \ln x = \dfrac{2}{3}$

$\therefore\ x = e^{2/3}$

隨堂練習

解方程式 $e^{x+\ln x} = 2x$ 。

在計算 $\log_b a$ 時可以利用兩個自然對數 $\ln a$ 和 $\ln b$ 的比來求出。

定理 6.1 （換底公式）

若 $a,b>0$ 且 $b\neq 1$，則 $\log_b a=\dfrac{\ln a}{\ln b}$。

證明： 令 $c=\log_b a$，則 $b^c=a$（對數的定義）

兩邊同時取 ln 得 $\ln b^c=\ln a$

$\therefore\ c\ln b=\ln a$

$\therefore\ c=\dfrac{\ln b}{\ln a}$

故 $\log_b a=\dfrac{\ln b}{\ln a}$

例題十一

求 $\log_5 3$ 的值。

解 利用換底公式

$$\log_5 3=\frac{\ln 3}{\ln 5}\approx\frac{1.0986}{1.6094}\approx 0.6826$$

隨堂練習

求 $\log_7 5$ 的值。

當我們做某項事業的投資，往往要問花多久時間投資的價值加倍。茲舉例說明如下：

例題十二

假設購買股票基金 10,000，按年利率 12% 連續複利計息，試問投資需花多長時間可使投資價值加倍？若投資金額改變時，情況如何？

解 按複利計息，本利和 $B(t)=10,000e^{0.12t}$

價值加倍，$20,000=10,000e^{0.12t}$

$$2=e^{0.12t}$$

$$\ln 2=0.12t$$

$$t=\frac{\ln 2}{0.12}\approx 5.78\text{(年)}$$

若投資金額改為 P 元，則投資價值加倍

$$2P=Pe^{0.12t}$$

$$\therefore\quad e=e^{0.12t}$$

得到相同的方程式，故也是要花 5.78 年才能使價值加倍。

綜合上面的討論，一個指數成長量 $Q(t)=Qe^{rt}$ $(r>0)$ 要加倍的時間為

$$\frac{\ln 2}{r}$$