

(O) 羅必達法則(L'Hôpital Rule)

定理 3-20 羅必達法則 (L'Hôpital Rule)

設函數 f 與 g 在 a 點的近旁 I 可微(可能 a 點除外), 且 $g'(x) \neq 0$ 對 $x \in I \setminus \{a\}$,

若(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

或(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty(-\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty(-\infty)$

且當極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或為 ∞ 或 $-\infty$ 時, 則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. 不定型 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$

例題 1. 試求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

解:

課堂練習: 試求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{x^3-3x+2}$

例題 2. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$

解:

課堂練習: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

2. 不定型 $0 \cdot \infty$

例題 3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

解:

課堂練習: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

南方科技大學
Southern Taiwan University

3. 不定型 $\infty - \infty$

例題 4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

解：

課堂練習：求 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

4. 不定型 0^0 , 1^∞ , ∞^0

例題 5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

解：

課堂練習：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-2x)^{\frac{3}{x}}$

例題 6. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$

解：

南台科技大學

Southern Taiwan University

課堂練習：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x}$