

6.4 指數型成長與衰退

當一個量 $Q(x) = Q_0 e^k$ 時；若 $k > 0$ 時，我們稱該量為指數型成長 (grow exponentially)，若 $k < 0$ ，則稱該量為指數型衰退 (decay exponentially)。由於 $Q'(x) = Q_0 e^k \cdot k = kQ(x)$ ，故

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = k = 100k\%$$

總而言之，若 $Q(x) = Q_0 e^{kx}$ ，則 $Q(x)$ 的改變百分率為 $100k\%$ 。

例題二十六

某鄉鎮的人口數為指數型成長 $P(t) = P_0 e^{kt}$ ，其中 t 代表 2000 年之後的年數。如果 2000 年時人口數為 10 萬人，2005 年時人口數為 12.5 萬人，試求每年人口增加的百分率。

解： $t = 0$ (2000 年) 時， $P(0) = P_0 e^{k \cdot 0} = 10$ (萬人)

$$\therefore P_0 = 10$$

$$P(5) = 10e^{k \cdot 5} = 12.5$$

隨堂練習

$$\begin{aligned} e^{k \cdot 5} &= 1.25 \\ \ln e^{5k} &= \ln 1.25 \\ 5k &= \ln 1.25 \\ k &= \frac{\ln 1.25}{5} \approx 0.0446 \end{aligned}$$

\therefore 每年人口增加的百分率為 4.46%。

南方科技大學
Southern Taiwan University

我們前面學過的連續複利計息本利和 $B(t) = Pe^{rt}$ 也是指數型成長的函數。如果現在存本金 10,000 元在銀行，以年利率 5% 連續複利計息，五年末本利和為 $B(5) = 10,000e^{0.05(5)} \approx 12,840$ 元。我們稱這個金額 12,840 元為未來值 (future value)。反之，如果預定五年末能獲得 12,840 元，年利率 5% 複利計息，現在應該存入本金若干？這就是求現值的問題。一般言之，如欲在若干年後，獲得以複利計息本利和 B ，則計算現在必須投資 P 元，則稱此 P 元為本利和 B 元之現值 (present value)。

假設志強想在七年後，從銀行領到 B 元，銀行年利率為 r ，按連續複利計息，志強必須存入多少錢？此即為七年後 B 元之現值問題。由公式 $B(t) = Pe^{rt}$ 可知 $P = B(t)e^{-rt}$ ，即七年後 B 元之現值為 $P(t) = Be^{-rt}$ 。

例題二十七

富升預計在四年末大學畢業時創業開店投資 100 萬元，若銀行年利率 9% 連續複利計息，他現在應存入多少錢才能達成計畫？

解 由題意知， $B = 100$ ， $r = 9\% = 0.09$ ， $t = 4$ 。

由現值公式，得 $P(4) = Be^{-rt} = 100e^{-0.09(4)} \approx 69.7676$ (萬元)

富升現在必須至少存入 697,676 元才能達成計畫。

隨堂練習

某國寶級藝術品在拍賣會場的價格為 $R(t) = 500e^{kt}$ 萬元，隨時間上漲。假設拍賣期間，每年以 5% 年利率連續複利增值，試問此藝術品應存放多少年，價錢可以賣得最高？

隨堂練習

胡先生以 100 萬元購買一農場，價格隨時間依 $P(t) = e^{kt}$ (百萬元) 方式在增值。若銀行年利率 9% 以連續複利計息，試問何時出售此農場可獲最高價格？

例題二十八

某放射性物質以指數型衰退，十年內衰退為原來的 $1/2$ 量，現有該物質 80 克，試問需經過多少年後該物質變為 10 克？

解 設七年後該物質的量為 $A(t) = Ce^{kt}$ ， C, k 為常數。

目前有 80 克，即 $80 = A(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$

$$\therefore A(t) = 80e^{kt}$$

十年後衰退為原有的 $1/2$ ，即

$$A(10) = \frac{1}{2}A(0)$$

$$80e^{k \cdot 10} = \frac{1}{2} \cdot 80$$

$$e^{10k} = \frac{1}{2}$$

兩邊同時取 \ln 函數， $10k = \ln \frac{1}{2}$

$$\therefore k = \frac{-\ln 2}{10} \approx -0.069315$$

故 $A(t) = 80e^{-0.069315t}$ 。

令 $A(t) = 10$ ，得

$$10 = 80e^{-0.069315t}$$

$$e^{-0.069315t} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

同時取 \ln 函數

$$-0.069315t = -3 \ln 2$$

$$t = 30 \text{ (年)}$$

該物質須經過三十年後變為 10 克。