

6.3 對數函數與指數函數的微分

6.3.1 對數函數的倒數

指數函數與對數函數都有很簡單的導數。我們將先推導出自然對數的導數，再由反函數的可微性，可求出自然指數的導數。至於一般的指數函數與對數函數，我們可以利用換底公式變成自然對數，再微分便可求出一般指數函數與對數函數的導數。

自然對數函數 $f(x) = \ln x$ 之導數，依導數之定義

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} && \text{(由對數的性質)} \\ &= \ln\left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}\right] && (\because \ln \text{ 為連續函數}) \\ &= \ln\left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m/x}\right] && \left(\text{令 } \frac{h}{x} = \frac{1}{m}\right) \\ &= \ln\left\{\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{1/x}\right\} && \text{(指數性質)} \\ &= \ln\left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{1/x} && \text{(根式函數有連續性)} \\ &= \ln e^{1/x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

因此得到。

定理 6.2

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

例題十三

求 $f(x) = x^2 \ln x$ 之導數。

解

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) + \left[\frac{d}{dx}(x^2) \right] \ln x \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x \\ &= x + 2x \ln x \end{aligned}$$

例題十四

若 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，求 $f'(x)$ ？

解

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(\ln x) \right] x - (\ln x) \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

隨堂練習

若 $g(t) = (t + \ln t)^{5/3}$ ，求 $g'(t)$ ？

若 $f(x) = \ln u(x)$ ，其中 $u(x)$ 為 x 的一個可微分函數，由連鎖得可得到 $f'(x)$ 的公式。

定理 6.3

若 $u(x)$ 為 x 的一個可微分函數，則

$$\frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u(x)} \frac{du}{dx}$$

例題十五

設 $f(x) = \ln(4x^3 + 2x^2 + x + 1)$ ，求 $f'(x)$ ？

解 在此

$$f(x) = \ln u, \quad u(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 1$$

因此，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{4x^3 + 2x^2 + x + 1} \frac{d}{dx}(4x^3 + 2x^2 + x + 1) \\ &= \frac{12x^2 + 4x + 1}{4x^3 + 2x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

例題十六

求 $f(x) = x + \ln \sqrt[3]{x}$ 的圖形在 $x=1$ 的切線方程式。

解

$$f(x) = x + \frac{1}{3} \ln x$$

所以 $f'(x) = 1 + \frac{1}{3x}$ ， $x=1$ 時 $f'(1) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 。也就是在 $x=1$ 時切線的斜率為 $\frac{4}{3}$ 。而 $x=1$ 時 $y = f(1) = 1 + \frac{1}{3} \ln 1 = 1 + 0 = 1$ 。圖形經過點 $(1, 1)$ ，切線方程式為

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{4}{3}(x - 1) \\ \therefore y &= \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

隨堂練習

- (a) 若 $f(x) = x \ln(x^2 + 1)^3$ ，求 $f'(x)$ ？
- (b) 某廠商出售一特殊商品，單價為 $P(x) = 1000 - x \ln x^2$ (元) 時可售出 x 個單位，試求收益函數 (revenue function) 及邊際收益函數 (marginal revenue function)。

至於一般對數函數要求其導數，我們可利用換底公式先將其轉換為自然對數後，再求導數。

定理 6.4

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

證明：

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

若 $f(x) = \log_a u(x)$ ，其中 $u(x)$ 為 x 的可微分函數，由連鎖律可得 $f'(x)$ 的公式。

定理 6.5

若 $u(x)$ 為 x 的一個可微分函數，則

$$\frac{d}{dx}[\log_a u(x)] = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{du}{dx}$$

例題十七

若 $f(x) = \log_3 (x^5 + 1)$ ，求 $f'(x)$ ？

解 $\because f(x) = \log_3 (x^5 + 1) = \frac{\ln (x^5 + 1)}{\ln 3}$ (換底公式)

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x^5 + 1} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{(\ln 3)(x^5 + 1)}$$

Southern Taiwan University

隨堂練習

若 $f(x) = \log_2 (x^3 + 1)$ ，求 $f'(x)$ ？

定理 6.6

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

證明：我們利用討論法，去掉絕對值符號

(1) $x > 0$ 時， $\ln |x| = \ln x$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (\text{定理 6.2})$$

(2) $x < 0$ 時， $\ln |x| = \ln(-x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln |x| &= \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) \quad (\text{定理 6.3}) \\ &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

不論 $x > 0$ 或 $x < 0$ ， $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$ 。

6.3.2 指數函數的倒數

我們可以利用自然指數與自然對數互為反函數來求自然指數的導數公式。

定理 6.7

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

證明：令 $y = e^x$

兩邊同時取 $\ln$ 函數， $\ln y = \ln e^x$ ，即 $\ln y = x$ 。

兩邊同時對 x 微分得 $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1$ ，所以 $\frac{dy}{dx} = y$ ，即 $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ 。

利用連鎖律，我們可以對一般的指數函數微分。

定理 6.8

若 $u(x)$ 為 x 的一個可微分函數，則

$$\frac{d}{dx} e^{u(x)} = e^{u(x)} \frac{du}{dx}$$

例題十八

求 $f(x) = e^{x^3+x^2+1}$ 的導數？

解

$$u(x) = x^3 + x^2 + 1$$

由定理 6.8 知

$$f'(x) = e^{x^3+x^2+1} \left[\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + 1) \right] = e^{x^3+x^2+1} (3x^2 + 2x)$$

例題十九

求 $f(x) = \frac{e^{2x-5}}{x-5}$ 的導數？

解

$$f'(x) = \frac{(x+5)e^{2x-5} \cdot (2) - 1 \cdot e^{2x-5}}{(x+5)^2} = \frac{2(x+5)e^{2x-5} - e^{2x-5}}{(x+5)^2} = \frac{(2x+9)e^{2x-5}}{(x+5)^2}$$

隨堂練習

若 $f(x) = xe^{x^2+1}$ ，求 $f'(x)$ ？

南方科技大學
Southern Taiwan University

定理 6.9

$$\frac{d}{dx} \cdot a^x = (\ln a) a^x$$

證明：令 $y = a^x$

兩邊同時取 $\ln$ 函數， $\ln y = \ln a^x = x \ln a$ ，兩邊同時對 x 微分

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$$

$$\therefore y' = (\ln a) y = (\ln a) a^x$$

由連鎖律可求得更一般性的導數公式。

定理 6.10

若 $u(x)$ 為 x 的一個可微分函數，則

$$\frac{d}{dx} a^u = (\ln a) a^u \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

例題二十

若 $f(x) = 2^x$ ，試求 $f'(x)$ ？

解

方法一：令 $y = 2^x$

兩邊同時取 $\ln$ 函數得 $\ln y = \ln 2^x = x \ln 2$ 。

兩邊同時對 x 微分， $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\ln 2) y$$

即 $f'(x) = (\ln 2) 2^x$ 。

方法二：直接用定理 6.9 套用公式

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (2^x) = (\ln 2) 2^x$$

隨堂練習

若 $f(x) = 5^x$ ，試求 $f'(x)$ ？

例題二十一

若 $f(x) = 7^{x^3+x}$ ，試求 $f'(x)$ ？

解

方法一：令 $y = 7^{x^3+x}$

兩邊同時取 $\ln$ 函數， $\ln y = \ln 7^{x^3+x} = (x^3+x)\ln 7$

兩邊同時對 x 微分， $\frac{1}{y}y' = (\ln 7)(3x^2+1)$

$$\therefore y' = (\ln 7)(3x^2+1)y = (\ln 7)(3x^2+1) \cdot 7^{x^3+x}$$

方法二：直接利用定理 6.10 套用公式

$$u(x) = x^3 + x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln 7)7^{x^3+x} \frac{d}{dx}(x^3+x) \\ &= (\ln 7)7^{x^3+x}(3x^2+1) \\ &= (\ln 7)(3x^2+1)7^{x^3+x} \end{aligned}$$

隨堂練習

若 $f(x) = 3^{x^2+x+1}$ ，試求 $f'(x)$ ？

例題二十二

求 $f(x) = x^2 e^{3x}$ 在區間 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值？

解

$$f'(x) = 2xe^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = xe^{3x}(2+3x)$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x(2+3x)e^{3x} = 0$$

$$\therefore x(2+3x) = 0 \quad (\because e^{3x} > 0)$$

$$\text{即 } x = 0, \text{ 求 } x = -\frac{2}{3}$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}e^{-2} \approx 0.0601$$

在端點 $x = -1, 1$ 的函數值為

$$f(1) = e^3 \approx 20.0855$$

$$f(-1) = e^{-3} \approx 0.0498$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 時有最小值 $f(0)=0$ 。

$f(x)$ 在 $x=1$ 時有最大值 $f(1)=20.0855$ 。

當我們要對一個涉及乘積、商或指數的函數做微分時，我們常常可以將該函數先取對數將式子簡化再作微分。這種技巧稱為對數的微分。

例題二十三

求 $f(x) = x^3(x^2 + 1)^4(x^4 - 5)^2$ 之導數？

解 在式子兩邊同時取 $\ln$ 函數

$$\ln f(x) = \ln[x^3(x^2 + 1)^4(x^4 + 5)^2]$$

$$\ln f(x) = \ln x^3 + \ln(x^2 + 1)^4 + \ln(x^2 + 5)^2$$

$$\ln f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x^2 + 1) + 2 \ln(x^4 + 5)$$

式子兩邊同時對 x 微分

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{2}{x^4 + 5} \cdot 4x^3$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \left[\frac{3}{x} + \frac{8x}{x^2 + 1} + \frac{8x^3}{x^4 + 5} \right]$$

$$= x^3(x^2 + 1)^4(x^4 - 5)^2 \left[\frac{3}{x} + \frac{8x}{x^2 + 1} + \frac{8x^3}{x^4 + 5} \right]$$

隨堂練習

試求 $f(x) = \frac{x^2 \sqrt[3]{x+1}}{(1+2x)^3}$ 之導數？

例題二十四

若 $f(x) = x^x$ ，求 $f'(x)$ ？

解

兩邊同時取 $\ln$ 函數，得 $\ln f(x) = \ln x^x$

$$\therefore \ln f(x) = x \ln x$$

兩邊同時對 x 微分

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x) + 1$$

$$f'(x) = f(x)[1 + \ln x] = x^x[1 + \ln x]$$

隨堂練習

若 $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ ，試求 $f'(x)$ ？

若 $Q(x)$ 是可微分的，則

$$\frac{d}{dx}[\ln Q(x)] = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

等式的右邊 $\frac{Q'(x)}{Q(x)}$ 是 $Q(x)$ 的相對改變率 (relative rate of change of $Q(x)$)。由

此可知要求一個量的相對改變率，只要對 $\ln Q(x)$ 求導數即可。

例題二十五

龍山企業集團經營建築、旅館、餐廳三種行業，在 2008 年這三個行業的收益 (revenue) 分別是建築業 4 億元、旅館業 8 億元、餐廳 2 億元。建築業成長 7%，旅館業成長 20%，餐廳業衰退 3%。試問全部收益的相對成長率為何？

解 2008 年建築業的收益為 $A(2008) = 4$

旅館業的收益為 $H(2008) = 8$

餐廳業的收益為 $C(2008) = 2$

2008 年的總收益為

$$\begin{aligned} R(2008) &= A(2008) + H(2008) + C(2008) \\ &= 4 + 8 + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

依題意

$$\frac{A'(2008)}{A(2008)} = 0.07, \quad \frac{H'(2008)}{H(2008)} = 0.2, \quad \frac{C'(2008)}{C(2008)} = -0.03$$

所以

$$A'(2008) = 0.07A(2008), \quad H'(2008) = 0.2H(2008), \quad C'(2008) = -0.03C(2008)$$

在 2008 年，全部收益的相對成長率為

$$\begin{aligned} \frac{R'(2008)}{R(2008)} &= \frac{A'(2008) + H'(2008) + C'(2008)}{A(2008) + H(2008) + C(2008)} \\ &= \frac{0.07A(2008) + 0.2H(2008) - 0.03C(2008)}{R(2008)} \\ &= \frac{0.07(4) + 0.2(8) - 0.03(2)}{14} \\ &= \frac{0.28 + 1.6 - 0.06}{14} \\ &= 0.13 \end{aligned}$$

三個行業的總收益增加 13%。

隨堂練習

某企業經營電子業及紡織業。在 2008 年電子業的收益為 9 (百萬元)，紡織業的收益為 7 (百萬元)，電子業的成長率為 11%，紡織業衰退 3%，試問 2008 年全部總收益的相對成長率為何？