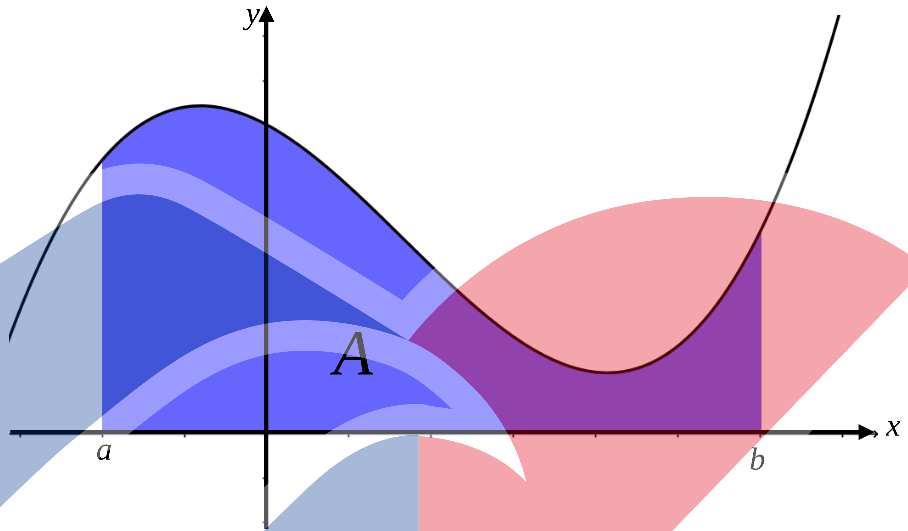
(C) 不規則面積的求法

假設 $y=f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為一連續且非負函數，則由曲線 $y=f(x)$，x 軸 $(y=0)$，兩垂直線 $x=a$ 及 $x=b$ 之間所圍區域的面積 A，可以經過下面四個步驟來求得，其區域圖形如下所示。



第一步驟：將區間 $[a,b]$ 作一分割。

定義 4.1

區間 $[a,b]$ 的分割 (partition) 是將 $[a,b]$ 分成若干子區間 (subinterval)，即分點集合 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n \mid a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$ 將區間 $[a,b]$ 分成 n 個子區間 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$。

為了方便起見，我們將區間 $[a,b]$ 分成 n 個子區間的長度是相同。所以，每一個區間長度為

$$\Delta x = x_1-x_0 = x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=\frac{b-a}{n}\text{。}$$

第二步驟：在每一子區間 $[x_{k-1},x_k]$ 內任取一點 c_k，$k=1,2,\cdots,n$。

第三步驟：計算黎曼和(Riemann Sum)

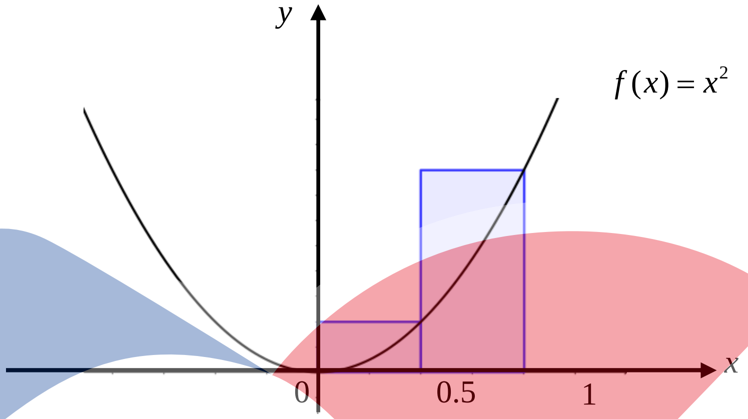
在第 k 個子區間 $[x_{k-1},x_k]$，以 $f(c_k)$ 當作矩形的高度，Δx 當作矩形的寬度，則此矩形的面積為 $f(c_k)\Delta x$，$k=1,2,\cdots,n$，則所有這些小矩形面積之和為

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\Delta x\sum_{k=1}^{n} f(c_k)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

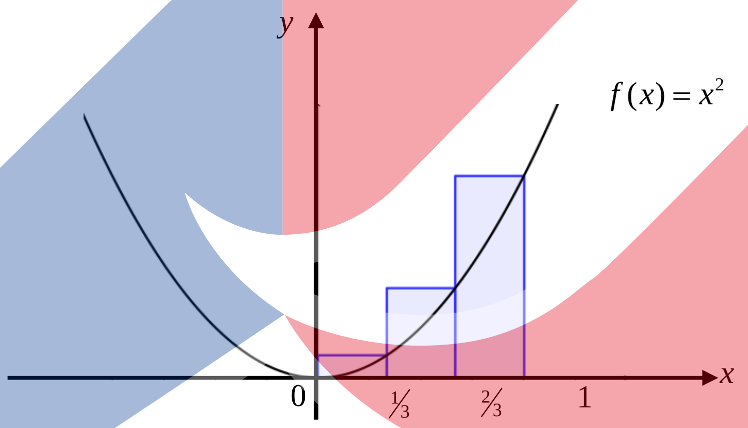
，且稱 S_n 為黎曼和。

例題 1. $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 區間為一連續且非負函數。現在 $[0,1]$ 區間做一等 n 分割後，且在第 k 子區間 $[x_{k-1},x_k]$ 中任取一點 c_k ，令 $c_k=x_k$ ， $k=1,2,\cdots,n$ 。

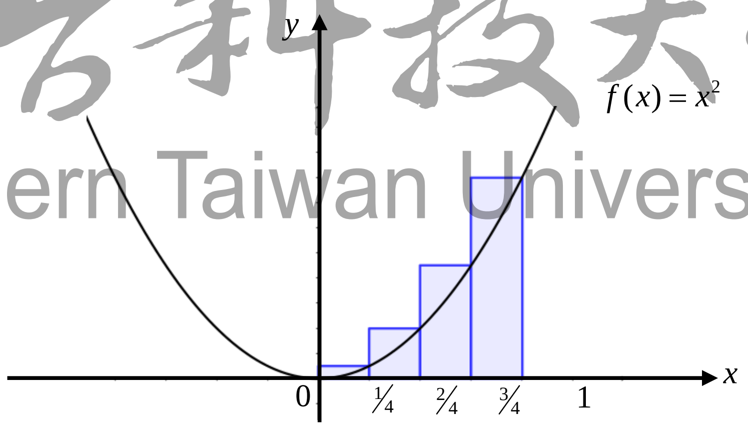
(1) 若 $n=2$ ，則其黎曼和為



(2) 若 $n=3$ ，則其黎曼和為



(3) 若 $n=4$ ，則其黎曼和為



第四步驟：將黎曼和取極限

由上述例題中，我們發現當每一個分割子區間的長度變小時，其黎曼和與欲所求之面積的誤差會變小，亦即，S_n 可以當做 A 的一個近似值，而且當每一子區間之長度 Δx 趨近於 0 時

（亦即，分割數 n 趨近於 ∞），此黎曼和的近似值就會趨近於 A。根據這一觀察，我們可以得到以下的結果：

$$\text{若} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \text{ 存在，則此極限值是所圍區域的面積。}$$

例題 2. 試求由 $y=x^2$，$x=0$，$x=1$ 及 x 軸所圍區域的面積。

解：

隨堂練習：試求由 $y=x+2$，$x=0$，$x=1$ 及 x 軸所圍區域的面積。