

(P) 瑕積分(Improper Integral)

在前一章討論定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的問題時，均限於兩個條件：

- (1) 在有限閉區間 $[a, b]$ 上求積分。
- (2) 被積分函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上為有界函數。

但為使積分的意義更加廣泛，我們在這一節中，將打破以前兩個限制的積分，即稱為瑕積分或廣義積分(improper integral)。現分別討論如下：

第一類型：積分區間為無限

定義 5.1

- (1) 若函數 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 連續，則定義

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

- (2) 若函數 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 連續，則定義

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

若以上各式極限存在，則稱該瑕積分為收斂(convergent)或收斂積分，而極限值為積分的值。若極限不存在，則稱該瑕積分為發散(divergent)或發散積分。

- (3) 若函數 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 連續，且 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 與 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 皆為收斂，則瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 為收斂，並定義為

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

若上式右邊任一積分發散，則稱瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 為發散。

例題 1. 試判斷 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1}$ 是否收斂。

解：

隨堂練習：試判斷 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 是否收斂。

解：

例題 2. 試判斷 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ 是否收斂。

解：

隨堂練習：試判斷 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$ 是否收斂。

解：

例題 3. 試求使 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收斂之 p 值。

解：

註：此一結論，在無窮級數章節之 p 級數中運用。

第二類型：被積分函數為無界

定義 5.2

(1) 若函數 f 在區間 $[a, b)$ 為連續，且 $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$ ，則定義

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

(2) 若函數 f 在區間 $(a, b]$ 為連續，且 $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$ ，則定義

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

若以上各式極限存在，則稱該瑕積分為收斂，而極限值既為積分的值。若極限不存在，則稱該瑕積分為發散。

(3) 若函數 f 在區間 $[a, c)$ 與 $(c, b]$ 為連續， $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \infty$ ，且 $\int_a^c f(x) dx$ 與 $\int_c^b f(x) dx$ 皆收斂，則稱瑕積分 $\int_a^b f(x) dx$ 為收斂，並定義為

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

若上式右邊任一積分發散，則稱瑕積分 $\int_a^b f(x) dx$ 為發散。

例題 4. 試判斷 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 是否收斂。

解：

南方科技大學
Southern Taiwan University

隨堂練習：試判斷 $\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$ 是否收斂。

解：

例題 5. 試判斷 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ 是否收斂。

解：

隨堂練習：試判斷 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 是否收斂。

解：

例題 6. 試判斷 $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$ 是否收斂。

解：

隨堂練習：試判斷 $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ 是否收斂。

解：

The logo of Southern Taiwan University is a stylized, abstract design composed of several overlapping, curved shapes. The colors used are a light blue, a white, and a light red/pink. The shapes are arranged in a way that suggests a sense of movement and modernity.

南台科技大學
Southern Taiwan University