(Q) 瑕積分

(Improper Integral)

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的問題時，均限於兩個條件：

(1) 在有限閉區間$[a,b]$上求積分。

(2) 被積分函數 $f(x)$在閉區間$[a,b]$上為有界函數。

第一類型：積分區間為無限

(1) 若函數$f(x)$在$[a, \infty)$連續，則定義

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

(2) 若函數$f(x)$在$(-\infty, b]$連續，則定義

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

若以上各式極限存在，則稱該瑕積分為收斂(convergent)或收斂積分，而極限值為積分的值。若極限不存在，則稱該瑕積分為發散(divergent)或發散積分。

(3) 若函數$f(x)$在$(-\infty, \infty)$連續，且$\int_a^{\infty} f(x)dx$

與$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$皆為收斂，則瑕積分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

為收斂，並定義為

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

若上式右邊任一積分發散，

則稱瑕積分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$為發散。

例題.試判斷$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x-1}$是否收斂。

解：$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x-1}=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{dx}{x-1}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln|x-1|\Big|_2^t\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln|t-1|-\ln 1\right]$$

$$=\infty$$

所以瑕積分$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x-1}$發散。

例題.試判斷 $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$ 是否收斂。

解：$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{t\to\infty}\int_{2}^{t}\frac{dx}{(x-1)^2}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x-1}\Big|_{2}^{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{t-1}-(-1)\right]=1$$

所以瑕積分 $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$ 收斂。

例題.試求使 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收斂 p 之值。

解：(1) 當 $p=1$ 時，

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln|x|\Big|_1^t\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}[\ln t-0]$$

$$=\infty$$

例題.試求使 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收斂 p 之值。

解：(2) 當 $p \neq 1$ 時，

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^t\right]$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t^{p-1}}-1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & ,若 p>1 \\ \infty & ,若 p<1 \end{cases}$$

1 2 × 4 = 8 1

例題.試求使 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收斂 p 之值。

解：所以，

當 $p>1$ 時，瑕積分 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收斂；

當 $p\leq 1$ 時，瑕積分 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ 發散。

第二類型：被積分函數為無界

(1) 若函數f在區間$[a,b)$為連續，

且 $\lim_{x\to b^-}|f(x)|=\infty$，則定義

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

(2) 若函數f在區間$(a,b]$為連續，

且 $\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\infty$，則定義

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

若以上各式極限存在，則稱該瑕積分為收斂，而極限值既為積分的值。若極限不存在，則稱該瑕積分為發散。

(3) 若函數f在區間$[a,c)$與$(c,b]$為連續，$\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=\infty$，且$\int_a^c f(x)dx$與$\int_c^b f(x)dx$皆收斂，則稱瑕積分$\int_a^b f(x)dx$為收斂，並定義為

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

若上式右邊任一積分發散，

則稱瑕積分$\int_a^b f(x)dx$為發散。

例題.試判斷$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$是否收斂。

解：$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{t\to1^-}\left[-2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^t\right]$$

$$= \lim_{t\to1^-}\left[-2\sqrt{1-t}+2\right]$$

$$= 2$$

所以瑕積分$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$收斂。

例題.試判斷$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$是否收斂。

解：$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{3}{2}\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}$$

所以瑕積分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$收斂。

例題.試判斷$\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$是否收斂。

解：$\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{t\to 3^-}\left[-\frac{1}{x-3}\Big|_0^t\right]$$

$$= \lim_{t\to 3^-}\left[-\frac{1}{t-3} - \frac{1}{3}\right] = \infty$$

所以$\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$發散，故亦$\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$發散。