(E) 微積分基本定理(Fundamental Theorem of Calculus)

定理 微積分基本定理(Fundamental Theorem of Calculus)

假設 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 為一連續函數，且 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$，則

(1) 若 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$，則 $G'(x)=f(x)$，$\forall x\in(a,b)$

(2) $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

證： (1) 由導函數定義得到，

$$G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

因為 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 為一連續函數，且 $[x,x+h]\subseteq[a,b]$，所以 $y=f(x)$ 在 $[x,x+h]$ 為一連續函數；故透過積分均值定理得知，必存在一數 $c\in[x,x+h]$，使得 $\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)[(x+h)-x]=f(c)h$，因此

$$G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)h}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)=f(x)$$

(2) 由(1)的結果得知，$G'(x)=F'(x)$，所以 $G(x)=F(x)+c$。

當 $x=a$，則 $G(a)=F(a)+c$，但是 $G(a)=\int_a^a f(t)dt=0$，故 $c=-F(a)$。

當 $x=b$，則 $G(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)$，故

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

註：微積分基本定理告訴我們定積分的計算過程，因此，在求算定積分時，必須做到兩件事：(1)率先獲得 $f(x)$ 的反導函數 $F(x)$，(2)計算 $F(b)-F(a)$。故在計算定積分通常用下列符號表示之，

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$$

註：微積分基本定理的發現，不但使看起來毫不相關的求積與求變化率的問題關連起來，而且從求積問題的歷史來看是一個真正的革命性突破。微積分基本定理的要義，是「求積是求變化率的反運算」；換句話說，經由微分學的系統化發展，許多求積問題經由求變化率的技術，變成遠較各式窮盡法簡單的一種方法，而且可應用的對象更為廣泛。

例題 1. 設 $F(x)=\int_0^x \frac{1}{t^2+9}dt$ ，試求 $F'(2)$ 之值。

解：

隨堂練習：設 $F(x)=\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt$ ，試求 $F'(2)$ 之值。

推論：

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上連續，g 在 $[a,b]$ 上可微分，則

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x)$$

(2) 若 f 在 $[a,b]$ 上連續，g,h 在 $[a,b]$ 上可微分，則

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$$

例題 2. 若 $F(x)=\int_0^{3x} \frac{1}{t^2+1}dt$ ，試求 $F'(1)$ 之值。

解：

隨堂練習：若 $F(x)=\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}dt$ ，試求 $F'(2)$ 之值。

例題 3. 若 $F(x)=\int_{2x}^{x^3-4} \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$ ，試求 $F'(2)$ 。

解：

隨堂練習：若 $f(0)=1$ ，$F(x)=\int_x^{3x} f(t)dt$ ，試求 $F'(0)$ 。

例題 4. 試計算 $\int_0^4 5dx$ 。

解：

隨堂練習：試計算 $\int_{-1}^3 25dx$ 。

例題 5. 試計算 $\int_{-3}^{0} x^3 dx$ 。

解：

隨堂練習：試計算 $\int_{0}^{1} x^2 dx$ 。

例題 6. 試計算 $\int_{1}^{3} (3-2x+x^2)dx$ 。

解：

隨堂練習：試計算 $\int_{-2}^{1} (x^2-2x+3)dx$ 。

例題 7. 試計算 $\int_{1}^{8} x\sqrt[3]{x}dx$ 。

解：

隨堂練習：試計算 $\int_{1}^{4} x\sqrt{x}dx$ 。

例題 8. 試計算 $\int_{-1}^{2} |x|dx$ 。

解：

隨堂練習：試計算 $\int_{0}^{2} |x-1|dx$ 。

例題 9. 若 $f(x)=\begin{cases} x+1 & ;x\ge 1 \\ 2 & ;x<1 \end{cases}$，試計算 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ 。

解：

隨堂練習：若 $f(x)=\begin{cases} 3-x & ;x\le 1 \\ 2 & ;x>1 \end{cases}$，試計算 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ 。