

(N) 機率的應用

一項隨機實驗(random experiment)的所有可能結果所成的集合(set),稱為樣本空間(sample space); 樣本空間中的每一結果稱為元素, 樣本空間的任一子集合(subset)稱為事件(event); 將樣本空間中每一個元素賦予唯一實數的規則稱為隨機變數(random variable)。亦即, 隨機變數是一個函數, 它將樣本空間中的每一個元素與一個實數相對應。我們以大寫字母 X 表示隨機變數, 而以小寫字母 x 表示其隨機變數值。

例題 1. 擲一個公平的銅板, 則樣本空間 $S = \{H, T\}$, 其中 H 表示正面, T 表示反面。

定義一隨機變數 X 為

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega = T \\ 1 & , \omega = H \end{cases}$$

若隨機變數 X 的值域構成一區間, 則隨機變數 X 稱為連續隨機變數(continuous random variable)。當 $f(x)$ 是表示連續隨機變數 X 之諸數值的函數時, $f(x)$ 通常稱為 X 的機率密度函數(probability density function)或簡稱為密度函數。因為面積將用來表示機率值, 而機率值均為正, 所以密度函數的圖形必完全位於 x 軸的上方, 其相關性質為

$$(1) 0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

註: 機率密度函數 $f(x)$ 並非代表隨機變數在 x 的機率值。連續隨機變數在固定一點的機率值永遠為 0。

例題 2. 若 X 為一連續隨機變數, 且其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} kx & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$, 試求 k 值。

解:

隨堂練習: 若 X 為一連續隨機變數, 且其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$, 試求 k 值。

若 X 為一連續隨機變數, 則累積分配函數(cumulative distribution function)定義為

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

根據為積分基本定理可知, $F'(x) = f(x)$ 且其相關性質如下:

$$(1) 0 \leq F(x) \leq 1 \text{ 恆成立}$$

$$(2) F(x) \text{ 為非遞增函數, 亦即, 若 } x_1 < x_2, \text{ 則 } F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$(4) F(x) \text{ 為右連續函數, 亦即, } \lim_{t \rightarrow x^+} F(t) = F(x)$$

例題：若 X 為一連續隨機變數，且其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求累積分配函數。

解：

隨堂練習：若 X 為一連續隨機變數，且其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} c(1+x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求(1)

c 值；(2) 累積分配函數。

例題 3. 若 X 為一均勻分配隨機變數(uniform distribution)，則其機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求累積分配函數。

解：

隨堂練習：若 X 為一指數分配隨機變數(exponential distribution)，則其機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求累積分配函數。

隨機變數的一個重要的特色是"集中趨勢"，亦即為"平均"值，隨機變數 X 的平均值稱為它的期望值(expected value)或平均數(mean)，記為以 $E(X)$ 或 μ 。對連續隨機變數而言，我們可以從機率密度函數計算期望值。

定義 6.6

令 X 為具有機率密度函數 $f(x)$ 的連續隨機變數，則 X 的期望值或平均數為

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

例題 4. 若連續隨機變數 X 在區間 $[1,3]$ 為一均勻分配隨機變數，亦即，其機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{2}, \text{ 則其期望值為何?}$$

解：

隨堂練習：設 X 為連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x) = \frac{3}{26}x^2, 1 \leq x \leq 3$ ，試求期望值？

隨機變數的另一個重要的特色是”離均趨勢”，亦即為”標準差(standard derivative)”或”變異數(variance)”，記為以 σ 或 $Var(X) = \sigma^2$ 。對連續隨機變數而言，我們可以從機率密度函數計算標準差或變異數。

定義 6.7

令 X 為具有機率密度函數 $f(x)$ 的連續隨機變數，則 X 的變異數為

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

註： $Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

例題 5. 若連續隨機變數 X 在區間 $[1,3]$ 為一均勻分配隨機變數，亦即，其機率密度函數為

$f(x) = \frac{1}{2}$ ，則其變異數為何？

解：

隨堂練習：設 X 為連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x) = \frac{3}{26}x^2$ ， $1 \leq x \leq 3$ ，試求變異數？

最後，列出一些常見的連續隨機變數分配：

(1) 均勻分配(uniform distribution)

(a) 機率密度函數(pdf)： $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$

(b) 累積機率函數(cdf)： $F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & ; 0 < x < b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$

(c) 數學期望值(expected value)： $E(X) = \mu = \frac{b+a}{2}$

(d) 變異數(variance)： $Var(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

(e) 動差生成函數(moment generating function; mgf)： $M(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$ ， $t \neq 0$

(2) 指數分配(exponential distribution)

(a) 機率密度函數(pdf)： $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$

(b) 累積機率函數(cdf) : $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$

(c) 數學期望值(expected value) : $E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda}$

(d) 變異數(variance) : $V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

(e) 動差生成函數(moment generating function; mgf) : $M(t) = \frac{-\lambda}{t - \lambda}$, $t < \lambda$

(3) 常態分配(normal distribution)

(a) 機率密度函數(pdf) : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$

(b) 累積機率函數(cdf) : $F(x) = P(X \leq x)$

(c) 數學期望值(expected value) : $E(X) = \mu$

(d) 變異數(variance) : $V(X) = \sigma^2$

(e) 動差生成函數(moment generating function; mgf) : $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

註：當 $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ 時，稱為標準常態分配。

南台科技大學
Southern Taiwan University