

(M) 定積分的應用—商業及經濟應用

1. 消費者剩餘與生產者剩餘

消費者剩餘就是消費者願意為一個財貨付出的最高金額與實際金額(市場均衡價格)之間的差異。相同的，生產者剩餘(producer surplus)就是所有生產單位的市場均衡價格與生產者願意為一個財貨付出的最低金額的差額總和。

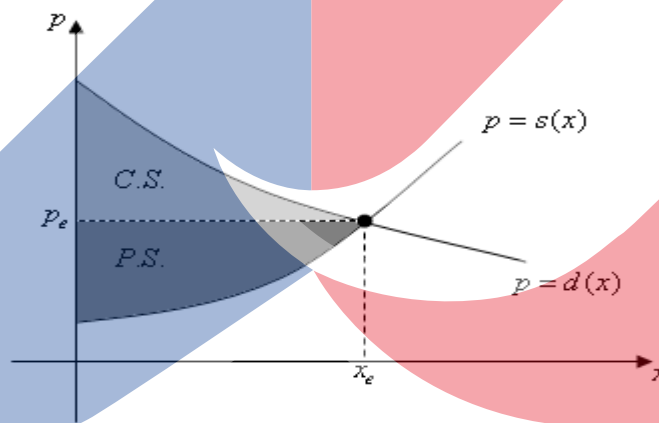
在自由競爭市場中，需求曲線與供給曲線的交點，經濟學上稱為均衡點。此點對應之需求量稱為均衡需求量 x_e ，當時的價格稱為均衡價格 p_e ，此時需求者與供給者均樂於交易。

現假設某商品之供需關係在市場上是平衡時，消費者願意支付高於平衡價格之消費者所獲得之總利益，此總利益稱為消費者剩餘(consumers' surplus)，簡稱 $C.S.$ ，若需求函數定義為 $p = d(x)$ ，則

$$C.S. = \int_0^{x_e} (d(x) - p_e) dx = \int_0^{x_e} d(x) dx - p_e x_e$$

同樣的，在市場上是平衡時，生產者願意低於平衡價格之價格供應市場所獲得之總利益，此總利益稱為生產者剩餘(producers' surplus)，簡稱 $P.S.$ 。若供給函數定義為 $p = s(x)$ ，則

$$P.S. = \int_0^{x_e} (p_e - s(x)) dx = p_e x_e - \int_0^{x_e} s(x) dx$$



例題 1. 某商品之需求函數 $d(x)$ 與供給函數 $s(x)$ 分別定義如下：

$$p = d(x) = 50 - 0.4x$$

$$p = s(x) = 0.1x$$

當市場供需均衡時，試求消費者與生產者剩餘。

解：

Southern Taiwan University

隨堂練習：某商品之需求函數 $d(x)$ 與供給函數 $s(x)$ 分別定義如下：

$$p = d(x) = 200 - 2x$$

$$p = s(x) = 2x$$

當市場供需均衡時，試求消費者與生產者剩餘。

例題 2. 某產品的需求函數為 $p = d(x) = 1200 - x^2$ ，此處 p 表單位價格， x 為需求量。又這些產品之供給函數為 $p = s(x) = 10x$ ，此處 p 表單位價格， x 表供給量。若產品之市場價格決定於其平衡價格，試求消費者剩餘及生產者剩餘。

隨堂練習：某產品的需求函數為 $p = d(x) = 180 - 3x^2$ ，此處 p 表單位價格， x 為需求量。又這些產品之供給函數為 $p = s(x) = 21x$ ，此處 p 表單位價格， x 表供給量。若產品之市場價格決定於其平衡價格，試求消費者剩餘及生產者剩餘。

2. 羅蘭茲曲線與所得分配

經濟學家用來探討社會中所得分配(income distribution)的方法，其理論依據為羅蘭茲曲線(Lorentz curve)。羅蘭茲曲線的 x -軸代表累積所得人口的百分比，其由最低所得的人口排列到最高所得的人口， y -軸代表所得累計之百分比。假設羅蘭茲曲線所對應之函數為 $f(x)$ ，根據上述說明，可知函數 f 有下列的性質：

- (1) f 的定義域為 $[0,1]$ 。
- (2) f 的值域為 $[0,1]$ 。
- (3) $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$ 。
- (4) 對每一個 $x \in [0,1]$ ， $f(x) \leq x$ 。
- (5) f 在 $[0,1]$ 為遞增函數。

例題 3. 某開發中國家的所得分配以函數表示如下：

$$f(x) = \frac{9}{10}x^3 + \frac{1}{10}x$$

- (1) 試繪出此所得分配函數的羅蘭茲曲線。
- (2) 計算 $f(0.2)$ 及 $f(0.95)$ 並解釋其結果。

解：

隨堂練習：某開發中國家的所得分配以函數表示如下：

$$f(x) = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}x$$

- (1) 試繪出此所得分配函數的羅蘭茲曲線。
- (2) 計算 $f(0.1)$ 及 $f(0.9)$ 並解釋其結果。

其次，我們考慮函數 $y = f(x) = x$ 所敘述的羅蘭茲曲線。因為最低 $100x\%$ 的所得人口可獲得正好 $100x\%$ 的總所得，直線 $y = x$ 稱為絕對均等線 (absolute equality)。很明顯的，當羅蘭茲曲線愈接近於此均等線時，代表在所得人口中所得分配愈平均；愈偏離此均等線時，則所得分配愈不平均。但羅蘭茲曲線接近於均等線之程度，乃是反應在羅蘭茲曲線與直線 $y = x$ 之間的面積，當羅蘭茲曲線愈接近於均等線，其所圍成的面積愈小。故可以定義一數，稱為羅蘭茲曲線之不均等係數，或基尼集中係數 (Ginis concentration coefficient)，它為均等線與羅蘭茲曲線之間的面積除以均等線下的三角形面積，故羅蘭茲曲線之不均等係數為

$$g = \frac{\int_0^1 [x - f(x)] dx}{\frac{1}{2}} = 2 \int_0^1 [x - f(x)] dx$$

係數 g 是介於 0 (絕對均等) 與 1 (絕對不均等) 之間的數。當係數愈大，表示所得分配愈不均。

例題 4. 某國家經發會發現該國醫師及電影演員之所得分配以函數表之，分別如下：

$$f(x) = \frac{17}{20}x^3 + \frac{3}{20}x, \quad g(x) = \frac{7}{10}x^4 + \frac{3}{10}x^2$$

試計算每一種職業之羅蘭茲曲線不均等係數，又何種職業的所得分配較不均等？

解：

隨堂練習：某國家經發會發現該國律師及教師之所得分配以函數表之，分別如下：

$$f(x) = \frac{13}{20}x^3 + \frac{7}{20}x, \quad g(x) = \frac{9}{10}x^4 + \frac{1}{10}x^2$$

試計算每一種職業之羅蘭茲曲線不均等係數，又何種職業的所得分配較不均等？

Southern Taiwan University