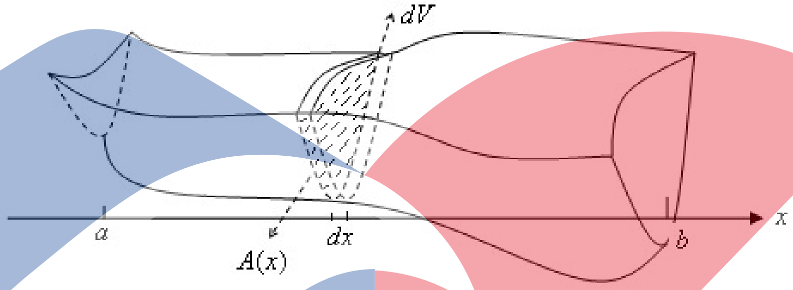
(M) 定積分的應用—體積

1. 已知橫截面的立體體積(Volumes of Solids with Known Cross Sections)

假設一立體 S，當在 x 點處垂直於 X 軸的截面積為 $A(x),\ \forall x\in[a,b]$，若我們考慮其中一小段 dx，則其對應的薄片區域的體積變率 $dV=A(x)dx$，若 $A(x)$ 可積，則 S 的體積(Volume)為

$$V=\int_0^V dV=\int_a^b A(x)dx\,.$$



定理 6.1

一立體 S，若在其 x 點處垂直於 X 軸的截面積為 $A(x)$，$\forall x\in[a,b]$，且 $A(x)$ 可積，則 S 的體積為

$$V=\int_a^b A(x)dx\,.$$

例題 1. 試求證半徑為 r 的球體積為 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

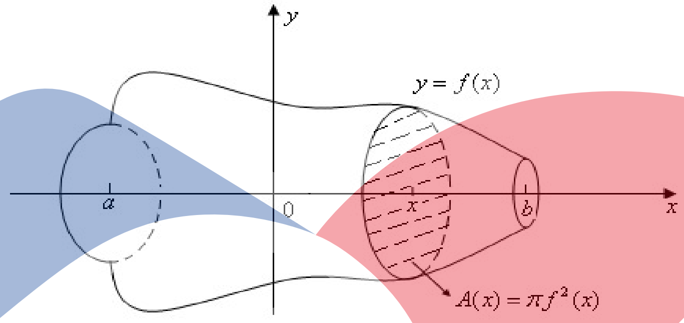
解：

隨堂練習：求底半徑為 r，高為 h 的圓錐體體積？

2. 圓盤法(The Disc Method)

設函數 $f(x)\geq 0$ 在 $[a,b]$ 內連續，若 R 為函數圖形 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 與 x 軸所圍區域，即 $R=\{(x,y)\,|\,a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\}$。令 S 為 R 繞 X 軸旋轉所成的旋轉體。因對任意 $x\in[a,b]$ 處垂直 X 軸之截面為半徑 $f(x)$ 的圓，故其截面積為 $A(x)=\pi f^2(x)$，所以由定理 6.1 可得 S 的體積為

$$V=\int_a^b A(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$



定理 6.2

設 $f(x)\geq 0$ 在 $[a,b]$ 上連續，則區域 $R=\{(x,y)\,|\,a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\}$ 繞 X 軸旋轉所得之旋轉體體積為

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

例題 2. 求曲線 $y=x^2$，$x\in[0,1]$ 與 x 軸所圍區域，繞 x 軸旋轉的旋轉體體積。

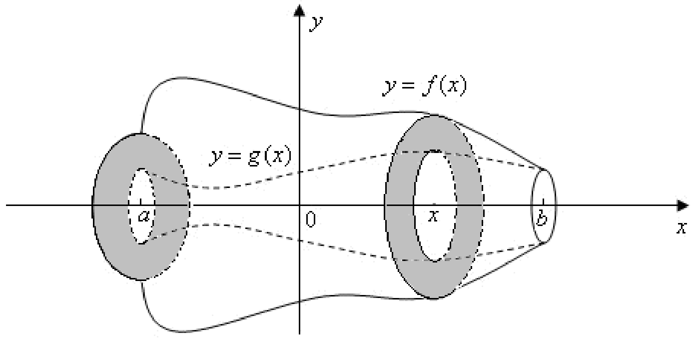
解：

隨堂練習：求曲線 $y=\sqrt{x}$，$x\in[1,4]$ 與 x 軸所圍區域，繞 x 軸旋轉的旋轉體體積。

定理 6.3

設函數 f，g 在 $[a,b]$ 連續且 $0\leq g(x)\leq f(x)$，$\forall x\in[a,b]$，則將區域 $R=\{(x,y)\,|\,a\leq x\leq b, 0\leq g(x)\leq y\leq f(x)\}$ 繞 x 軸旋轉所得之體積為

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)-g^2(x)dx$$



例題 3. 求由曲線 $y=x$ 與 $y=\sqrt{x}$ 所為區域繞 x 軸旋轉的立體體積？

解：

例題 4. 如例題 3 所示之區域，求繞(1) y 軸 (2)直線 $y=-1$ 的旋轉體體積。

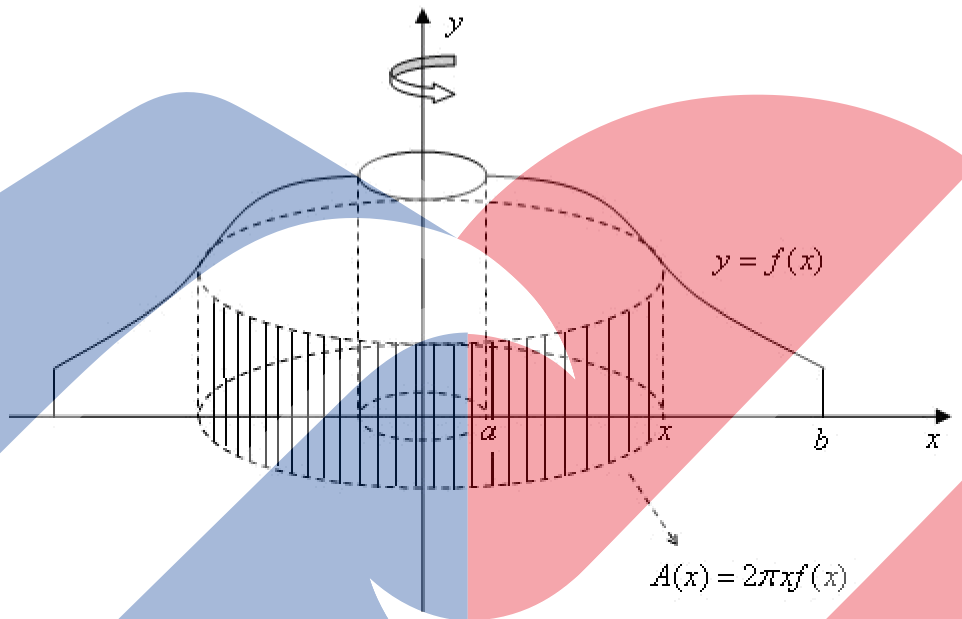
解：

隨堂練習：求由曲線 $y=x$ 與 $y=x^2$ 所為區域 (1)繞 x 軸 (2)繞 y 軸 (3)繞直線 $y=2$ 旋轉的立體體積？

3. 剝殼法(The Shell Method)

設函數 $f(x)\ge 0$ 在 $[a,b]$ 上連續，若 R 為函數 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 與 X 軸所圍之區域，即 $R=\{(x,y)\,|\,0\le a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$，令 S 為 R 繞 Y 軸旋轉一圈的旋轉體，因對任意 $x\in[a,b]$ 處，其對應的高 $f(x)$ 繞 Y 軸所得的截面為中空圓面，其面積為 $A(x)=2\pi xf(x)$，由定理 6.1 可得 S 的體積為

$$V=\int_a^b A(x)dx = 2\pi\int_a^b x f(x)dx$$



定理 6.4

設函數 $f(x)\ge 0$ 在 $[a,b]$ 上連續，則區域 $R=\{(x,y)\,|\,0\le a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ 繞 y 軸旋轉一圈的旋轉體體積為

$$V=2\pi\int_a^b x f(x)dx$$

例題 5. 求 $y=x-x^2$ 的圖形與 x 軸所圍區域，繞 y 軸旋轉所得之體積？

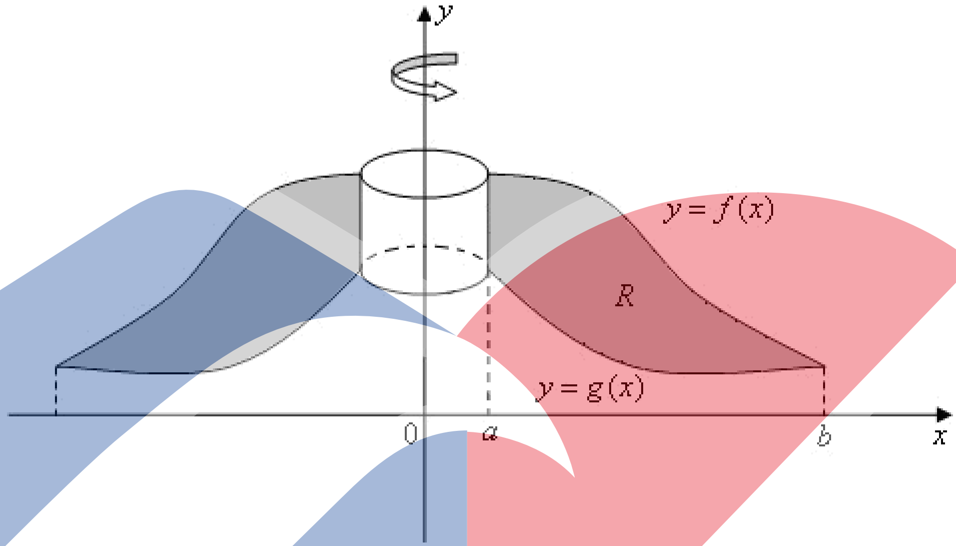
解：

隨堂練習：求 $y=4-x^2$，$x=0$，$y=0$ 所圍區域，繞 y 軸旋轉所得之體積？

定理 6.5

設函數 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續且 $0 \le g(x) \le f(x)$，$\forall x \in [a,b]$，則區域 $R = \{(x,y) \mid 0 \le a \le x \le b, 0 \le g(x) \le y \le f(x)\}$ 繞 y 軸旋轉一圈的旋轉體體積為

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx .$$



例題 6. 求曲線 $y = x$ 與 $y = x^2$ 所圍區域繞(1) y 軸 (2)直線 $x = -1$ 旋轉所得之體積？

解：

隨堂練習：求 $y = 4 - x^2$，$x = 1$，$y = 0$ 所圍區域，繞(1) y 軸 (2)直線 $x = 2$ 旋轉所得之體積？