

(K) 定積分的應用—面積

依據定積分的定義，由曲線 $y = f(x)$ ， $y = 0$ ， $x = a$ ， $x = b$ 所圍區域的面積為

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

其中 $y = f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為一連續非負的函數。在本節中，將利用定積分求一般區域面積的情況。

定理 4.8

假設 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為連續函數，則由曲線 $y = f(x)$ ， $y = g(x)$ ， $x = a$ ， $x = b$ 所圍區域的面積為

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

例題 1. 試求曲線 $y = x$ 、 $y = -3x + 8$ 與 y 軸所圍區域的面積。

解：

隨堂練習：試求曲線 $y = 2x$ 、 $y = -2x + 8$ 與 $x = 4$ 所圍區域的面積。

例題 2. 試求兩曲線 $y = x^2$ 與 $y = 1$ 所圍區域的面積。

解：

隨堂練習：試求兩曲線 $y = -x^2 + 2$ 與 $y = 1$ 所圍區域的面積。

例題 3. 試求兩曲線 $y = x^2$ 與 $y = \sqrt{x}$ 所圍區域的面積。

解：

隨堂練習：試求兩曲線 $y = x$ 與 $y = \sqrt{x}$ 所圍區域的面積。



例題 4. 試求兩曲線 $y = x^2 - 2x$ 與 $y = x$ 在區間 $[0, 4]$ 所圍區域的面積。

解：

隨堂練習：試求兩曲線 $y = 2x - x^2$ 與 $y = x - 2$ 所圍區域的面積。

定理 4.9

假設 $x = f(y)$ 與 $x = g(y)$ 在區間 $[c, d]$ 為連續函數，則由曲線 $x = f(y)$ ， $x = g(y)$ ， $y = c$ ， $y = d$ 所圍區域的面積為

$$A = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$$

例題 6. 試求兩曲線 $x = y^2 - 9$ 與 $x = 2y - 6$ 所圍區域的面積。

解：

南台科技大學

隨堂練習：試求兩曲線 $y^2 = 9 - x$ 與 $y = x - 3$ 所圍區域的面積。

Southern Taiwan University