多變量微積分

(I) 偏導數

(A) 多變數函數

設$\mathbb{R}$為所有實數所成的集合，$\mathbb{R}^2$為所有二元有序實數組所成的集合，即$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$
若$\Omega\subset\mathbb{R}^2$，且對每一$(x,y)\in\Omega$，在$\mathbb{R}$中有唯一的$z$與之對應，則函數$f\colon\Omega\to\mathbb{R}$稱為兩個變數的實值函數，$\Omega$為函數$f$的定義域，$\mathbb{R}$為函數$f$的對應域，在$\mathbb{R}$中有被對應的$z$所成的集合，稱為$f$之值域。$\Omega$中元素$(x,y)$所對應的$z$值，記作$f(x,y)$，即

$$z=f(x,y)$$

x,y稱為自變數，z稱為因變數。

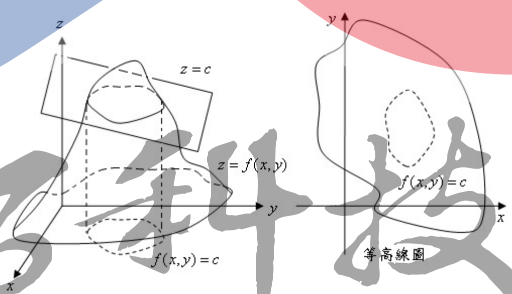
例題. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$，求(a) $f(1,-4)$；(b) f的定義域。

解：

二變數函數$z=f(x,y)$的圖形，即集合

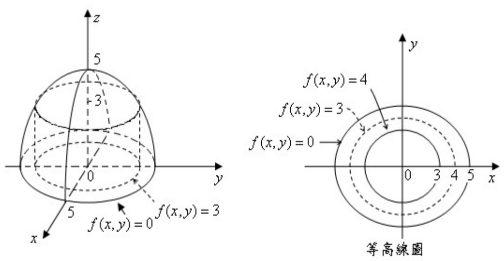
$$\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y)\in\Omega\}$$

為三維空間的一曲面。二變數函數之圖形，一般來說，畫起來並不容易。我們可藉等高線(Level curve)來了解曲面。此曲面與高度為c之平面$z=c$的相交曲線，投影於xy平面上所得之水平曲線$f(x,y)=c$，稱為f之一等高線。在曲線$f(x,y)=c$上的各點，函數f均有相同的值。我們只要看等高線圖，對函數$z=f(x,y)$即有所了解。

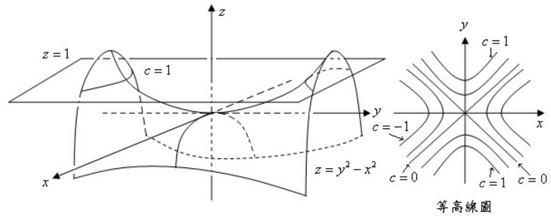


例題. 求作函數$z=f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$的圖形。

解:



例題. 試求函數 $z=f(x,y)=y^2-x^2$ 的等高線。
解:



三變數或其他多變數函數，可仿上定義推廣之。例如，三變數函數

$$u=f(x,y,z)$$

定義為對每一 $(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$，在 R 中有唯一 u 與之對應。對某些常數 c 而言，滿足 $f(x,y,z)=c$ 之點 (x,y,z) 的集合為一曲面，此曲面稱為 f 之一等高曲面(Level surfaces)。

(B) 極限與連續

定義：設(x_0,y_0)為函數f之定義域Ω內一固定點，若當Ω內之動點(x,y)趨近於(x_0,y_0)時，亦即$d\left((x,y),(x_0,y_0)\right)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$趨近於 0，恒能使得$f(x,y)$趨近於一實數$L$，亦即$|f(x,y)-L|$之值會趨近於 0，則稱當$(x,y)$趨近於$(x_0,y_0)$時，函數$f(x,y)$的極限為$L$，記作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

並且我們說f在點(x_0,y_0)之極限存在，其極限值為L。

在單變數函數的情形，$f(x)$在$x=a$處的極限為L，若且唯若$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$。有關二變數的情況就比較複雜。因在$xy$平面中，有無數條不同的曲線(稱為路徑)趨近於$(x_0,y_0)$，欲使$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在，則須對於沿著趨近於$(x_0,y_0)$之所有可能路徑，$f$均趨近於相同值$L$。換言之，若存有二條趨近於$(x_0,y_0)$之不同路徑，使得$f(x,y)$趨近於不同值，則$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$不存在。

定理：若$f(x,y)=c$，c為一常數，則$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=c$

定理：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0$ 及 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y=y_0$

定理：若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$及$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L_2$，則

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]=L_1\pm L_2$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[kf(x,y)\right]=kL_1$，其中$k$為一常數。

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)g(x,y)\right]=L_1L_2$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L_1}{L_2}$ $(L_2\neq 0)$

例題. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2+y+2}{xy}$

解:

例題. 設 $f(x,y)=\dfrac{xy}{|x|+|y|}$，證明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

解:

例題. 設 $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+3y^2}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

解: 當 (x,y) 沿著 x 軸(即 $y=0$)趨近於 $(0,0)$ 時，

又當 (x,y) 沿著 y 軸(即 $x=0$)趨近於 $(0,0)$ 時，

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

例題. 設 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

解: 當 (x,y) 沿著直線 $y=x$ 趨近於 $(0,0)$ 時，

又當 (x,y) 沿著直線 $y=2x$ 趨近於 $(0,0)$ 時，

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

例題. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

解:

定義 7.5

(1) 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 則稱函數 $f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0) 為連續。換言之，對任意動點 (x,y)，若 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$，恒能使得 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\to 0$，則稱函數 $f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0) 為連續。

(2) 若函數 $f(x,y)$ 在區域 Ω 內每一點均為連續，則稱 f 在 Ω 為連續。

定理：令$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，若函數$f, g: \Omega \to R$在點$(x_0, y_0) \in \Omega$連續，則

(1) 函數$cf, f \pm g$與$f \cdot g$均在點(x_0, y_0)連續，其中c為常數。

(2) 當$g(x_0, y_0) \neq 0$時，函數$\dfrac{f}{g}$在點(x_0, y_0)連續。

定理：若$\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$，且函數$f: \Omega_1 \to \Omega_2$與$g: \Omega_2 \to R$分別在點$(x_0, y_0) \in \Omega_1$與$f(x_0, y_0)$連續，則合成函數$g \circ f: \Omega_1 \to R$亦在點$(x_0, y_0)$連續。

若函數$f(x, y)$為形如$ax^m y^n$之諸項的和(其中$a \in \mathbb{R}, m, n$為非負整數)，則稱f為二變數的多項式函數。若$h(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$其中$f, g$均為多項式函數，則稱$h$為二變數的有理函數。多項式函數在整個$xy$平面為連續，而有理函數在分母為0之點外的所有點為連續。

例題. 討論$f(x, y) = \dfrac{xy}{y - x}$的連續性。

解:

例題. 設函數f與g分別定義為：

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

與

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

試問f, g在$(0, 0)$是否連續?

解:

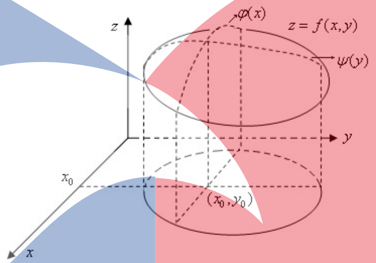
(C) 偏導數

1. 偏導數(partial derivative)的定義及符號

設 $z = f(x,y)$ 為定義於區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 之函數，且 $(x_0, y_0) \in \Omega$ 。則二單變數函數

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$
$$\psi(y) = f(x_0, y)$$

之圖形為曲面 $z = f(x,y)$ 分別與平面 $y = y_0$ 及 $x = x_0$ 之交集，均為空間曲線，分別稱為 f 在 x 軸方向與 y 軸方向的偏函數(或切片函數)。



若視 y 為常數，則 φ 在點 $x = x_0$ 之導數，稱為 f 在點 (x_0, y_0) 對 x 之偏導數，記作 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ ，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

同理，若視 x 為常數，則 ψ 在點 $y = y_0$ 之導數，稱為 f 在點 (x_0, y_0) 對 y 之偏導數，記作 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ ，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d\psi}{dy}\right|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

註: 符號 ∂ 為亞可比(Jacobi,1804-1851)所介紹，讀為”Partial”或”round”。

在 Ω 中所有能使 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)}$ 存在的點 (x,y) 定義為一函數，則稱此函數為 f 對 x 之偏導函數，記作 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ，即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

同理，在 Ω 中所有能使 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}$ 存在的點 (x,y) 定義為一函數，稱為 f 對 y 之偏導函數，記作 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ，即

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

偏導函數之符號尚有其他表示法，如:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f = f_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f = f_2$$

至於兩個以上變數函數之偏導函數，可仿此定義之。例如:函數$u = f(x,y,z)$有下列之偏導函數:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f \text{ ，} \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f \text{ ，} \frac{\partial f}{\partial z} = f_z = D_z f$$

例題. 設 $f(x,y) = x^2 - 2x^3y - y^3$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 及 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)}$ 。

解:

例題. 設函數 $f(x,y,z) = \ln(x + y^2 + z^3)$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 。

解:

例題. 設 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$，求 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ 。

解: 由定義知

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1$$

2. 偏導數的幾何意義

二變數函數之兩個偏導數，均具有其幾何意義。如圖 7-6，因單變數函數在一點的導數是其圖形過該點的切線斜率，故我們知函數 $z = f(x,y)$ 在點 (x_0, y_0) 之偏導數

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \varphi'(x_0)$$

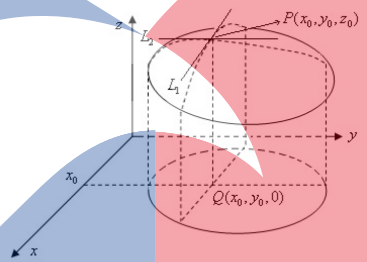
表曲面 $z=f(x,y)$ 與平面 $y=y_0$ 相交所成之切片函數 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 過點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 之切線 L_1 的斜率。而偏導數

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)}{\Delta y}=\psi'(y_0)$$

表曲面 $z=f(x,y)$ 與平面 $x=x_0$ 相交所成之切片函數 $\psi(y)=f(x_0,y)$ 過點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 之切線 L_2 的斜率。此二切線的方程式分別為

$$L_1:\begin{cases} z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \\ y=y_0 \end{cases} \quad 與 \quad L_2:\begin{cases} z-z_0=f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ x=x_0 \end{cases}$$



例題. 設一橢圓拋物面之方程式為 $18z=4x^2+9y^2$，試求平面 $x=3$ 與曲面相交的曲線在點 $(3,2,4)$ 之切線斜率。

解:

例題. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 與平面 $y=1$ 相交的曲線在點 $(3,1,2)$ 之切線方程式。

解:

3.高階偏微分

以上所討論之偏導函數，均稱為第一階偏導函數。如將此等求得之偏導函數，再對 x、y 等自變數繼續求偏導函數，則形成第二階偏導函數，如

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=D_x(D_x f)=D_{xx}f$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=D_y(D_x f)=D_{xy}f$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=D_x\left(D_y f\right)=D_{yx} f$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=D_y\left(D_y f\right)=D_{yy} f$$

兩個以上變數之函數的其他高階偏導數函數亦可依此類推。

例題. 設 $f(x,y)=xe^y+ye^x$，求 f_{xy} 及 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}$。

解:

例題. 設 $f(x,y)=\ln(x^2+y^3)$，求 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$。

解:

定理：設 f 為二變數函數且 Ω 為 $\mathbb{R}^2$ 之一開集合。若 f_x, f_y, f_{xy} 與 f_{yx} 在 Ω 皆為連續，則對 Ω 中的每一點 (x,y)，

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

(D) 連鎖律

定理：設函數$u=f(x,y)$，且f_x，f_y均為連續。若$x=x(s,t)$，$y=y(s,t)$，且x_s,x_t,y_s,y_t皆存在，則

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

推論. 設函數$u=f(x,y)$且f_x,f_y均連續。若$x=x(t)$，$y=y(t)$且$x'(t),y'(t)$皆存在，則

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

例題. 設$u=x^2\ln y$，且$x=e^t$，$y=t^2-1$，求$\frac{du}{dt}$。

解:

例題. 設$u=x^2+xy+y^2$，且$x=2s+t$，$y=s-2t$，求$\frac{\partial u}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t}$。

解:

隱函數微分公式：

設$u=F(x,y)$之第一階偏導函數連續，且可微分函數$y=f(x)$滿足方程式

$$F(x,y)=0 \quad \text{或} \quad F(x,f(x))=0$$

得

$$0=\frac{du}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

若$\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$，則

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

例題. 若方程式$x^3+x^2y^2-x-2y+1=0$，求$\frac{dy}{dx}$。

解:

(E) 多變數函數的極值

1. 二階偏導數檢定法

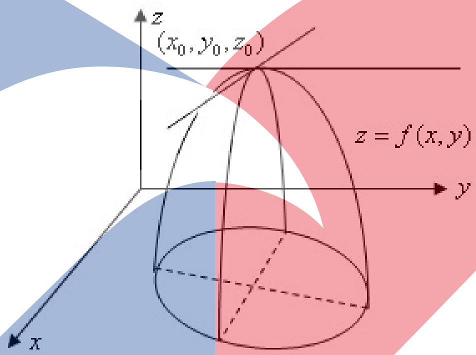
定義：設函數 $z=f(x,y)$ 定義於區域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$，且 $(x_0,y_0)\in\Omega$。若對 (x_0,y_0) 之一鄰域 $N_\delta(x_0,y_0)=\{(x,y)\,|\,d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$ 內任一點 (x,y)，恆有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$$

則稱 (x_0,y_0) 為 f 之一相對(局部)極大點，而 $f(x_0,y_0)$ 為 f 之一相對極大值。同理，若對 $N_\delta(x_0,y_0)$ 內任一點 (x,y)，恆有

$$f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$$

則稱 (x_0,y_0) 為 f 之一相對(局部)極小點，而 (x_0,y_0) 為 f 之一相對極小值。



定理：若函數 $z=f(x,y)$ 在 Ω 內一點 (x_0,y_0) 有一極大或極小值，且 $f_x(x_0,y_0)$ 與 $f_y(x_0,y_0)$ 均存在，則

$$f_x(x_0,y_0)=0\text{，}\ f_y(x_0,y_0)=0$$

定理(二階偏導數檢定法)：

設函數 $z=f(x,y)$ 在 Ω 內一點 (x_0,y_0) 之鄰域中各二階偏導函數皆存在，且為連續。若 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$\Delta=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-\left[f_{xy}(x_0,y_0)\right]^2$$

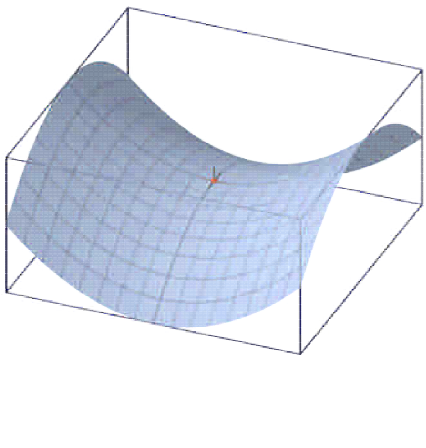
則

（1） 當 $\Delta>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ 或 $f_{yy}(x_0,y_0)<0$ 時，$f(x_0,y_0)$ 為一極大值；

（2） 當 $\Delta>0$，且 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ 或 $f_{yy}(x_0,y_0)>0$ 時，$f(x_0,y_0)$ 為一極小值；

（3） 當 $\Delta>0$ 時，$f(x_0,y_0)$ 既非極大值亦非極小值，而稱 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 為 f 之一鞍點；

（4） 當 $\Delta=0$ 時，我們無法用此法判定 (x_0,y_0) 為 f 之極端點或鞍點。



例題. 試求函數 $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$ 之極值及鞍點。

解:

例題. 試求點 $(1,2,1)$ 至平面 $2x-y+z=7$ 之最短距離。

解:

2. 拉格蘭日乘數法則

定理：設 $f(x,y)$ 與 $g(x,y)$ 在域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 內之一階偏導函數均存在，且為連續。又對 Ω 內任一點 (x,y)，均有

$$g_x^2(x,y)+g_y^2(x,y)>0$$

若 $(x_0,y_0)\in\Omega$ 是滿足方程式 $g(x,y)=0$，而使 $f(x,y)$ 有極值之點，則存在 $\lambda_0\in\mathbb{R}$，使得 (x_0,y_0,λ_0) 為下面方程組之解：

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

在此定理中，λ 稱為拉格蘭日乘數(Lagrange multiplier)。

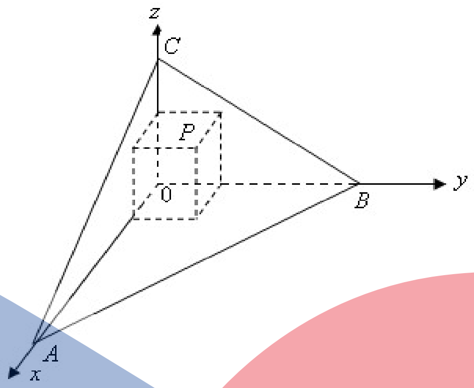
推論 2. 若在條件 $g(x,y,z)=0$，$h(x,y,z)=0$ 下，欲求函數 $u=f(x,y,z)$ 之極值，可令

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 g(x,y,z)+\lambda_2 h(x,y,z)$$

極值點 (x,y,z) 可從下列方程組中解出 $x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$ 而得：

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0\text{，}\frac{\partial L}{\partial y}=0\text{，}\frac{\partial L}{\partial z}=0\text{，}\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0\text{，}\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=0$$

例題. 設$a>0,\ b>0,\ c>0$，平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$交三座標軸於 A,B,C 三點，過$\Delta ABC$內一點$P(x,y,z)$作三座標平面之平行平面，試求此三平面與座標平面所圍成最大六面體之體積。



解:

例題. 求二平面$x-y=2$，$x-2z=4$之交線上，最接近原點之點，並求該點與原點的距離。

解：

(F) 最小平方法

應用到統計學上求數個資料之迴歸直線的方法(稱為最小平方法)。

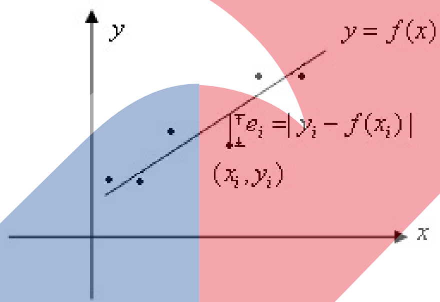
設$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$為由實驗收集所得的一些資料。這些資料在座標平面上描出，所得之點集合，稱為散佈圖。若這些點之分佈情形很近一直線，我們想求最“靠近”這些點的直線。

設此直線方程式為$y=f(x)=ax+b$

令

$$e_i=|y_i-f(x_i)|,\quad i=1,2.....n$$

表觀測值y_i與估計值$f(x_i)$之差。我們稱e為以$f(x_i)$來近似y_i時之誤差，如圖 7-11 所示。欲使f“最佳配合(best fit)”這些資料，一種很有用之方法為使所有e_i之平方和為最小。



令$E=e_1^2+e_2^2+....+e_n^2=[y_1-f(x_1)]^2+[y_2-f(x_2)]^2+\cdots+[y_n-f(x_n)]^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i)]^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2$$

利用最小化誤差平方和而求得之“最佳配合直線”$y=ax+b$，稱為資料$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$的最小平方直線或迴歸線(Regression line)。

我們將E看成a,b的二變數函數

$$E=E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

欲求E之極小值，則須使其第一階偏導數等於 0，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial a}=0\\[2mm]\dfrac{\partial E}{\partial b}=0\end{cases}$$

利用連鎖律及$\sum_{i=1}^{n}b=nb$，可得

$$\frac{\partial E}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-ax_i-b)=-2\left[\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

及

$$\frac{\partial E}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=-2\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-nb\right]$$

故方程組可改寫成如下之正規方程式：

$$\begin{cases}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a+(\sum_{i=1}^{n} x_i)b=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a+nb=\sum_{i=1}^{n} y_i\end{cases}$$

解方程組，可得

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n\end{vmatrix}},\quad b=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n\end{vmatrix}}$$

即

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b=\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i)-(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

由

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}=2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ,\ \frac{\partial^2 E}{\partial a\partial b}=\frac{\partial^2 E}{\partial b\partial a}=2\sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\ \frac{\partial^2 E}{\partial a^2}=2n$$

得 $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}>0$，及

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}\frac{\partial^2 E}{\partial b^2}-(\frac{\partial^2 E}{\partial a\partial b})^2=4\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right]=4\left[(\sum_{i=1}^{n} 1)(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right]=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2>0$$

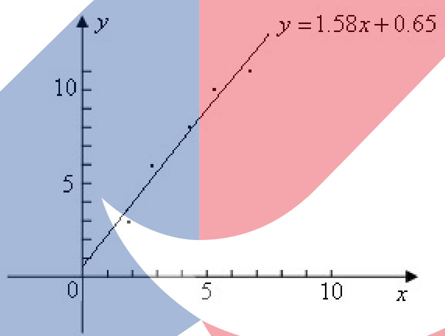
故上述方程組解得之 a,b 值，確能最小化誤差平方和。

例題. 某公司為了研究廣告費對銷售量的影響，收集了如下表的資料。x 為以萬為單位的廣告費，y 為以萬為單位的銷售量。試求其迴歸線。

廣告費 x	2	3	4.5	5.5	7
銷售量 y	3	6	8	10	11

解：

其圖形和資料分佈如下圖：



例題. 下表顯示美國從 1963 到 1968 的工業生產指數。試利用最小平方法求其發展趨勢：

年份(x)	1963	1964	1965	1966	1967	1968
指數(y)	79	84	91	99	100	105

解:

(II) 重積分

(A) 在矩形上的二重積分

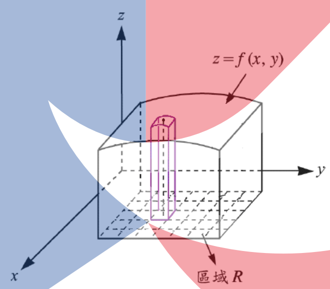
設 R 為 xy 平面上的矩形區域：$R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$
我們可用平行 x 軸及 y 軸的直線將 R 分割成 n 個小矩形，並將這些小矩形記為 $R_1,R_2,\ldots,R_n$。設 R_k 的面積為 ΔA_k，$k=1,2,\ldots,n$。令 $\|P\|$ 為所有 R_k 中最大的對角線長度。現在考慮一個定義在 R 上的二變數函數 $f(x,y)$。在每一個 R_k 上選一點 (x_k,y_k)，則

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k = f(x_1,y_1)\Delta A_1 + f(x_2,y_2)\Delta A_2 + \ldots + f(x_n,y_n)\Delta A_n$$

稱為 f 對分割 $P=\{R_1,R_2,\ldots,R_n\}$ 的黎曼和(Riemann sum)。若極限 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$ 存在，則稱 f 在 R 上可積分(integrable over R)。此極限值稱為 f 在 R 上的二重積分(double integral of f over R)，並記為

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

定理：若 $f(x,y)$ 是定義在矩形 R 上的連續函數，則 f 在 R 上可積分。



定理：

(1) 二重積分是線性的，亦即若 f,g 在矩形 R 上連續，則

$$\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA$$，k 是任一常數。

$$\iint_R [f(x,y)\pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

(2) 設 R_1 和 R_2 是兩個不重疊的矩形，且其交集為一線段。若 f 在 R_1,R_2 連續，則

$$\iint_{R_1\cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

(3) 若 f,g 在矩形 R 上連續，且 $f(x,y)\le g(x,y)\ \ \forall (x,y)\in R$，則

$$\iint_R f(x,y)dA \le \iint_R g(x,y)dA$$

例題. 設 $f(x,y)=\begin{cases}1 & ,0\le x\le 2, 0\le y<1\\ 2 & ,0\le x\le 2, 1\le y\le 2\end{cases}$，試求 $\iint_R f(x,y)dA$，其中 $R=\{(x,y): 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$

解:

(B) 疊積分

1. 在矩形上計算二重積分

假設 $f(x,y)$ 是定義在矩形 R 上的連續函數，其中 $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$。

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

例題. 試求 $\int_0^1\int_0^2 (8xy+4y)dydx$

解:

2. 在非矩形區域上的二重積分

假設 S 為平面上包含於矩形 R 上的區域， $f(x,y)$ 為定義在 S 上的函數。現在定義一函數如下：

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in S \\ 0, & (x,y)\in R\setminus S \end{cases}$$

$F(x,y)$ 為定義在 R 上函數。若 $F(x,y)$ 在 R 上可積分，則我們稱 $f(x,y)$ 在 S 上可積分，且 $f(x,y)$ 在 S 上的二重積分定為：

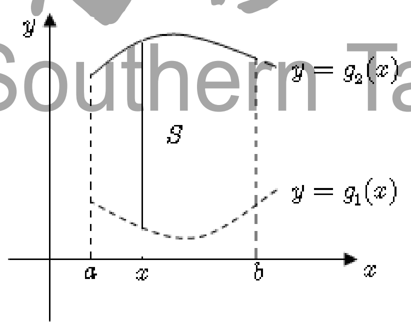
$$\iint_S f(x,y)dA=\iint_R F(x,y)dA$$

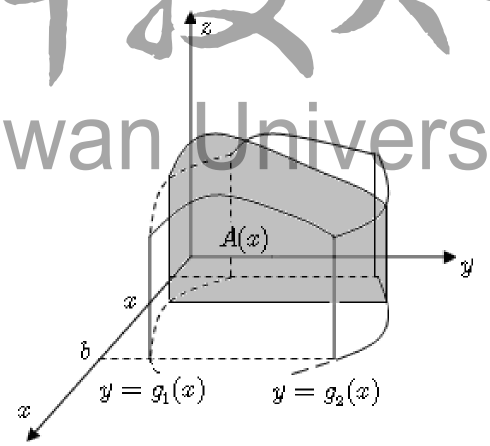
第一型區域: 假設 $g_1,g_2:[a,b]\to R$ 是兩連續函數，

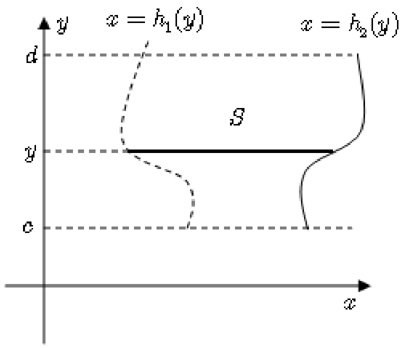
$$S=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$$

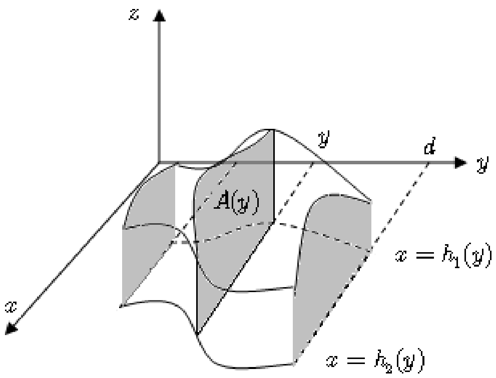
第二型區域: 假設 $h_1,h_2:[c,d]\to R$ 是兩連續函數，

$$S=\{(x,y)\,|\,h_1(y)\le x\le h_2(y), c\le y\le d\}$$









定理：設 $f(x,y)$ 是定義在區域 S 上的連續函數。

(1) 若 S 為第一型區域，則

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

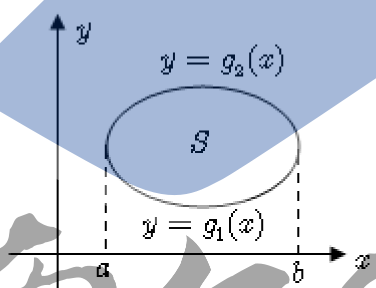
(2) 若 S 為第二型區域，則

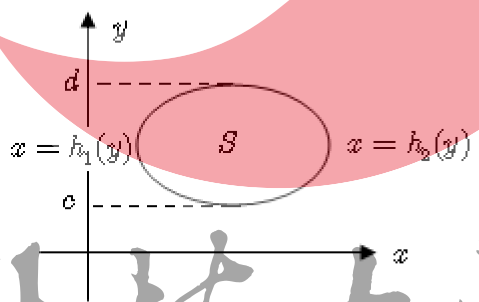
$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

定理(Fubini 定理)：

若 $f(x,y)$ 在區域 S 上連續，且 S 可同時表示為第一型及第二型區域，則

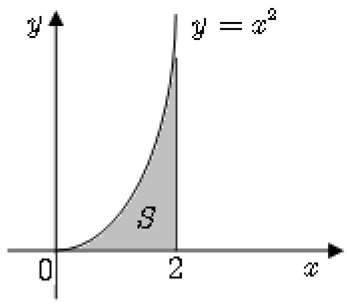
$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$





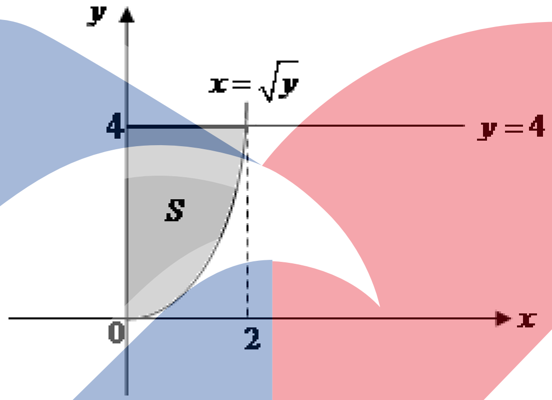
例題. 試求 $\iint_S (12x+10y)dA$，其中 $S = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\}$

解:



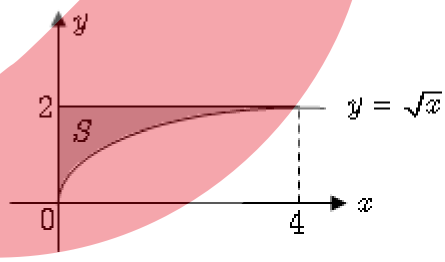
例題. 試求$\iint\limits_S 4xe^{y^2}dA$，其中 S 為由 $x=0$ ，$y=4$ ，$y=x^2$ 所圍成之區域。

解:



例題. 求$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\sqrt{1+y^3}dydx$

解：



(C) 二重積分之變數變換

定理：設 $f(x,y)$ 為在區域 S 上之連續函數，若變數變換

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

將 uv 平面上之區域 S^* 以一對一映射至 xy 平面上之區域 S，且 Jacobian 為

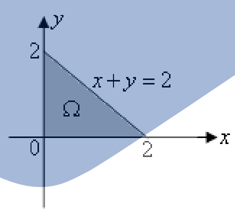
$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, (u,v) \in S^*$$

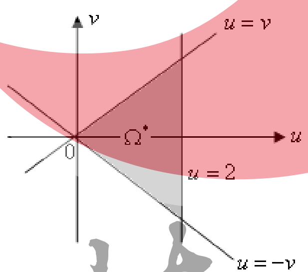
則

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{S^*} f(g(u,v),h(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv$$

例題. 設 Ω 為由 x 軸，y 軸及直線 $x+y=2$ 所圍成之區域，求 $\iint_\Omega e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$

解：





例題. 設 Ω 為由曲線 $xy=1$，$xy=2$，$y=4x$ 與 $y=x$ 所圍成之區域，求 $\iint_\Omega x^2y^2dxdy$

解：