

(B) 增量與微分

1. 增量與微分

若函數 $y = f(x)$ ，且 x 由最初值 x_0 變到最後值 x_1 ，則變數 x 的增量 Δx 記為

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

且產生對應變數 y 的增量 Δy 記為

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

若令 x 代表自變數的最初值，則上式可以改寫成

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

導函數的定義可得

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

當 $\Delta x \approx 0$ 時， $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ ，亦即， $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

定義 微分 (Differentials)

若 $y = f(x)$ 為可微分函數，以 dy 表示 y 的微分，且

$$dy = f'(x)dx$$

例題：若 $y = f(x) = 3x^2 - 5$ ，則 $dy =$

定理 3-19 微分公式

設 u, v 為可微分函數且令 k 為常數，則

- (1) $dk = 0$
- (2) $d(ku) = kdu$
- (3) $d(u \pm v) = du \pm dv$
- (4) $d(uv) = u dv + v du$
- (5) $d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u dv - v du}{u^2}$, $u \neq 0$

例題. $y = x^2 + 2x$ ，求 dy

解：

例題. $y = x^2 - \frac{1}{x}$ ，求 dy

解：

例題. $y = \sqrt{2x+3}$ ，求 dy

解：

南方科技大學
Southern Taiwan University

例題. $y = (x^2 + 1)^3$, 求 dy

解：

課堂練習： $y = e^{3x} + \ln 5x$, 求 dy

例題 5. 若 $xy^2 + x^2 + 3y = 4$ 求 dy 及 $\frac{dy}{dx}$ 。

解：

課堂練習：若 $x^3 + y^3 + x^2y + 3 = 0$ 求 dy 及 $\frac{dy}{dx}$ 。

2. 微分近似值

觀察下圖，其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $dy = f'(x_0)dx$, 若令 $dx = \Delta x$, 則 dy 與 Δy 之間的誤差會因 Δx 愈小時愈趨近於 0 , 既 dy 之值將愈近似於 Δy 。此時

$$dy \approx \Delta y$$

或

$$f'(x_0)dx \approx f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

則

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

上式稱為 $f(x_0 + \Delta x)$ 的微分近似值。其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 為 $f(x)$ 從 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 的實際增量，而 $dy = f'(x_0)\Delta x$ 為 $f(x)$ 從 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 的近似增量。

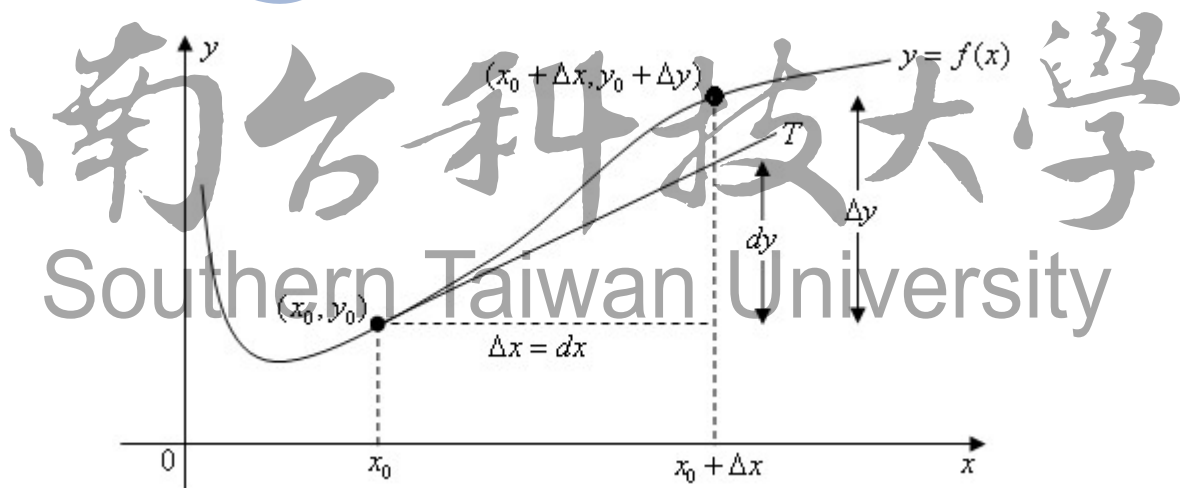


圖 3-28

例題 2. 若 $y = x^3$, 求當 $x = 2$, $\Delta x = 0.1$ 時 Δy 之值為何？若令 $\Delta x = dx$ 則 dy 之值為何？又若 $\Delta x = 0.01$ 或 $\Delta x = 0.001$ 時又如何？並求出 dy 與 Δy 之誤差？

解：

Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
0.1			
0.01			
0.001			

課堂練習：若 $y = x^4 + 2x$ ，求當 $x = 1$ ， $\Delta x = 0.01$ 時， Δy 之近似值為何？

例題 4. 利用微分求 $\sqrt[3]{215.4}$

解：

課堂練習：利用微分求 $\sqrt{101}$ 之近似值。

例題. 設需求函數 $p = \sqrt{400 - x}$ ， $0 \leq x \leq 400$ ，試以微分式估計當銷售量由 256 件增至 257 件時的收益變化量。

解：

南方科技大學
Southern Taiwan University