班級__________ 學號__________ 姓名__________

(G) 代換積分法

由微分的連鎖律，可得

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

由不定積分定義，可得

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

但是，上面兩個式子的關係並不明顯見於其他例子；因此，我們可以透過一種方式，將積分變成一較為簡化的積分，這一種方式稱為代換積分(integration by substitution)，其方式如下所示：

$$\int f'(g(x))g'(x)dx$$

令 $u = g(x)$ ，則 $du = g'(x)dx$

$$= \int f'(u)du = f(u) + c = f(g(x)) + c$$

例題 1. 試計算 $\int 2x(x^2+5)^7 dx$

解：

隨堂練習：試計算 $\int 3x^2(x^3+5)^7 dx$

解：

例題 2. 試計算 $\int (x+5)^{10} dx$

解：

隨堂練習：試計算 $\int (2-x)^{10} dx$

解：

例題 3. 試計算 $\int \sqrt{7x+9}dx$

解：

班級＿＿＿＿＿＿學號＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

隨堂練習：試計算 $\int \sqrt{3x+2}\,dx$

解：

例題 4. 試計算 $\int \dfrac{x^3}{(1+x^4)^{\frac{1}{3}}}dx$

解：

隨堂練習：試計算 $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

解：

在計算定積分時，需要透過變數變換法來化簡積分式，其轉換方式如下所示：

令 $u=g(x)$，則 $du=g'(x)dx$

當 $x=b$ 時，$u=g(b)$

當 $x=a$ 時，$u=g(a)$

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)du = f(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = f(g(b))-f(g(a))$$

例題 5. 試計算 $\int_0^1 (x+1)^{11}dx$

解：

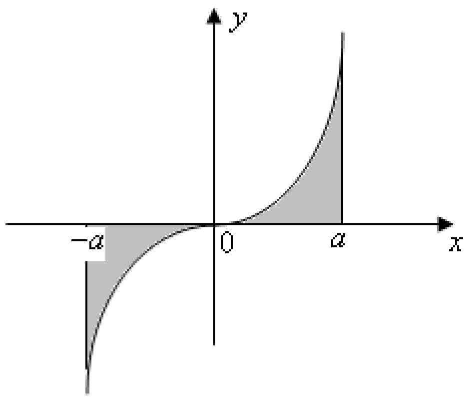
隨堂練習：試計算 $\int_0^1 2x(x^2+1)^5 dx$

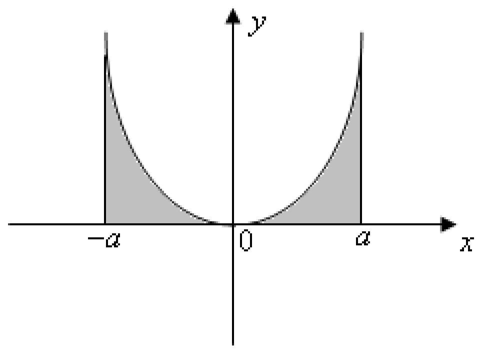
解：

性質： 設 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上連續，

(1) 當 $f(x)$ 為奇函數時，則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ 。

(2) 當 $f(x)$ 為偶函數時，則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ 。





例題 6. 試計算 $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x^4+x^2+1)^3}dx$

解：

隨堂練習：試計算 $\int_{-5}^{5} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

解：