

## (G) 代換積分法

由微分的連鎖律，可得

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

由不定積分定義，可得

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

但是，上面兩個式子的關係並不明顯見於其他例子；因此，我們可以透過一種方式，將積分變成一較為簡化的積分，這一種方式稱為代換積分(integration by substitution)，其方式如下所示：

$$\int f'(g(x))g'(x)dx$$

$$\text{令 } u = g(x), \text{ 則 } du = g'(x)dx$$

$$= \int f'(u)du = f(u) + c = f(g(x)) + c$$

例題 1. 試計算  $\int 2x(x^2 + 5)^7 dx$

解：

隨堂練習：試計算  $\int 3x^2(x^3 + 5)^7 dx$

解：

例題 2. 試計算  $\int (x+5)^{10} dx$

解：

隨堂練習：試計算  $\int (2-x)^{10} dx$

解：

例題 3. 試計算  $\int \sqrt{7x+9} dx$

解：

南方科技大學

Southern Taiwan University

隨堂練習：試計算  $\int \sqrt{3x+2} dx$

解：

例題 4. 試計算  $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^{1/3}} dx$

解：

隨堂練習：試計算  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

解：

在計算定積分時，需要透過變數變換法來化簡積分式，其轉換方式如下所示：

令  $u = g(x)$ ，則  $du = g'(x)dx$

當  $x = b$  時， $u = g(b)$

當  $x = a$  時， $u = g(a)$

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)du = f(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = f(g(b)) - f(g(a))$$

例題 5. 試計算  $\int_0^1 (x+1)^{11} dx$

解：

隨堂練習：試計算  $\int_0^1 2x(x^2+1)^5 dx$

解：

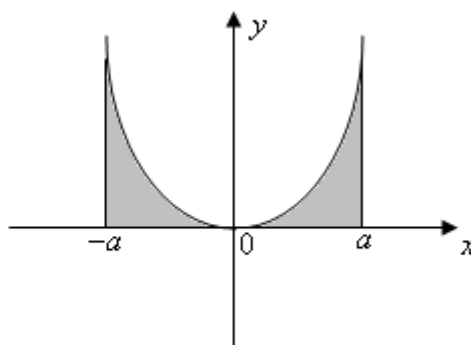
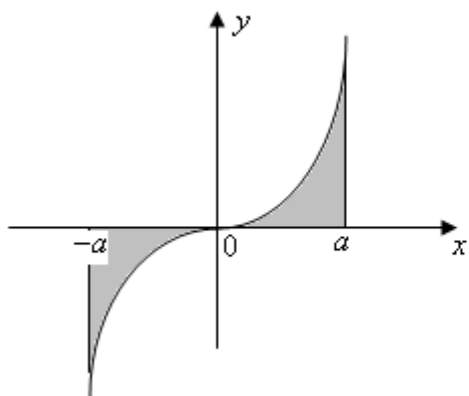
性質：設  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上連續，

(1) 當  $f(x)$  為奇函數時，則  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ 。

(2) 當  $f(x)$  為偶函數時，則  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 。

南方科技大學

Southern Taiwan University



例題 6. 試計算  $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^4 + x^2 + 1)^3} dx$

解：

隨堂練習：試計算  $\int_{-5}^5 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$

解：

南台科技大學  
Southern Taiwan University