

5.4 繪圖

截至目前，我們學過一階導數 $f'(x)$ 可以用來決定函數圖形的上升或下降，學過二階導數可以用來決定函數圖形的凹向。這些工具可幫忙找到圖形的高點和低點以及彎曲與轉向。除此之外，我們還可以利用極限來描述圖形的特徵。

定義 5.6

若 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ (或 $-\infty$) 或 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$ (或 $-\infty$)

則稱直線 $x = c$ 為 $f(x)$ 圖形的垂直漸近線 (vertical asymptote)。

一般而言，當 $q(c)=0$ 且 $p(c) \neq 0$ 時，則有理函數 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ 必有一垂直漸近線 $x = c$ 。

例 1 1

求 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ 的圖形的垂直漸近線。

定義 5.7

若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ，則稱 $y = l$ 為 $f(x)$ 圖形的水平漸近線 (horizontal asymptotes)。

例 1 2

求 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ 的圖形的水平漸近線。

 隨堂練習

試求 $h(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$ 的垂直漸近線和水平漸近線。

除了垂直漸近線、水平漸近線之外，也有圖形的漸近線，既非垂直也非水平線，我們稱之為斜漸近線。

定義 5.8

若 $f(x)$ 可表成

$$f(x) = Ax + B + g(x)$$

且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

則稱 $y = Ax + B$ 為 $f(x)$ 圖形的斜漸近線。

南台科技大學
Southern Taiwan University