5.3 凹性與反曲點

在 5.1 節、5.2 節利用一階導數 f'(x)的（正負）符號決定函數 f(x)的遞增和遞減以及函數圖形出現相對極值的點。其實，圖形的上升也有所不同；例如，在下圖（圖 5.11）中的圖 (1) 和圖 (2) 圖形均為上升，但圖形的走法不同，

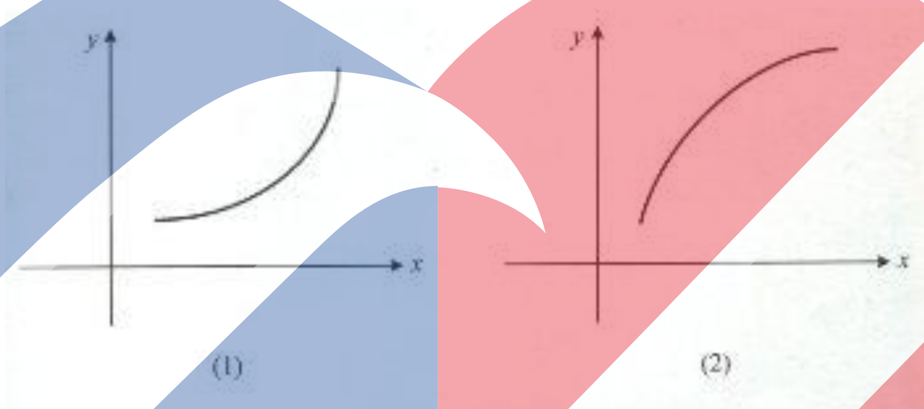

圖 5.11

圖 5.12

圖 (1) 開口向上，圖 (2) 開口向下。要更了解圖形的變化情形，我們必須進一步探討這種圖形的彎曲性，這個彎曲的性質稱為**凹性** (concavity)。由圖 5.12 之圖 (1) 觀察發現切線斜率由左而右是在遞增，函數圖形不只遞增且遞增速度加快，圖 (2) 切線斜率由左而右是在遞減，表示圖形遞增但遞增速度減慢。

我們利用這個性質來定義凹向。

定義 5.4

若 $f(x)$在區間(a,b)上可微

(1) 若 $f'(x)$在(a,b)上是遞增，則稱 $f(x)$在(a,b)上是凹向上 (concave upward)

(2) 若 $f'(x)$在(a,b)上是遞減，則稱 $f(x)$在(a,b)上是凹向下 (concave downward)

從幾何上而言，若圖形在每條切線上方，則爲凹向上圖形，若圖形在每條切線下方則爲凹向下圖形如圖 5.13

利用二階導數 $f''(x)$的正、負值可以推論導數 $f'(x)$的遞增或遞減，可以證得下面定理。

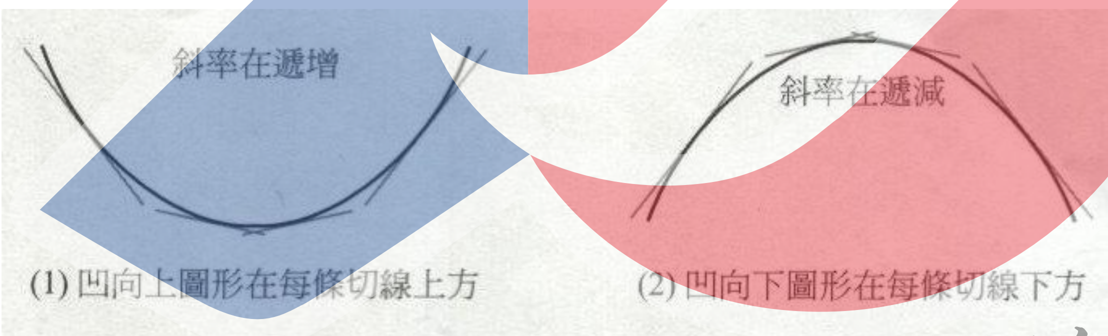

圖 5.13

定理 5.3

假設 $f(x)$爲定義在區間(a,b)上的函數且 $f(x)$的二階導數 $f''(x)$ 存在，

(1) 若對於每一個 $x \in (a,b)$, $f''(x) > 0$ ，則 $f(x)$的圖形在區間(a,b)上爲凹向上。

(2) 若對於每一個 $x \in (a,b)$, $f''(x) < 0$ ，則 $f(x)$的圖形在區間(a,b)上爲凹向下。

例 7

若 $f(x)=x^3-3x^2$，試求 $f(x)$的圖形凹向上的區間和凹向下的區間。

隨堂練習

試求 $f(x)=3x^4-4x^3+1$的圖形凹向上及凹向下的區間。

圖 5.14

在圖 5.14 中，在點 P(1,-2)的左側圖形是凹向下，而右側圖形是凹向上；像這種點，當圖形經過該點時凹向會改變，稱爲反曲點 (point of inflection)。我們定義如下：

定義 5.5

$f(x)$在 $x<a$ 時的凹向與 $x>a$ 的凹向不同，則稱點$(a,f(a))$爲函數 $f(x)$的圖形的一個反曲點。

在反曲點 P$(c,f(c))$，$f(x)$的圖形既非凹向上($f''(c)>0$) 也非凹向下($f''(c)<0$)；因此，若 $f''(c)$ 存在，則 $f''(c)=0$。我們可得下面定理：

定理 5.4

若$(c,f(c))$爲 $f(x)$圖形的反曲點，則 $f''(c)=0$ 或 $f''(c)$ 不存在。

例 8

試求 $f(x)=2x^3+3x^2+5$的反曲點。

例 9

試問 $g(x)=x^{\frac{4}{3}}$ 的圖形是否有反曲點？

隨堂練習

試問 $h(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 是否有反曲點？

我們可以利用二階導數的正負值來判斷在給定的臨界值是否有相對極大值或相對極小值，我們稱此判別法爲二階導數判別法 (second derivative test)。

定理 5.5　（ 二階導數判別法 ）

若 $f''(x)$ 在區間 (a,b) 上存在，$c\in(a,b)$ 且 $f'(c)=0$，則

(1) 若 $f''(x)>0$，則 $f(x)$ 在 $x=c$ 有相對極小值 $f(c)$。

(2) 若 $f''(x)<0$，則 $f(x)$ 在 $x=c$ 有相對極大值 $f(c)$。

(3) 若 $f''(x)=0$，則無法據此做相對極值的判斷。

我們利用圖 5.19，用其中圖 (1)、圖 (2)、圖 (3) 分別說明以上定理的結論(1)、(2)、(3)。

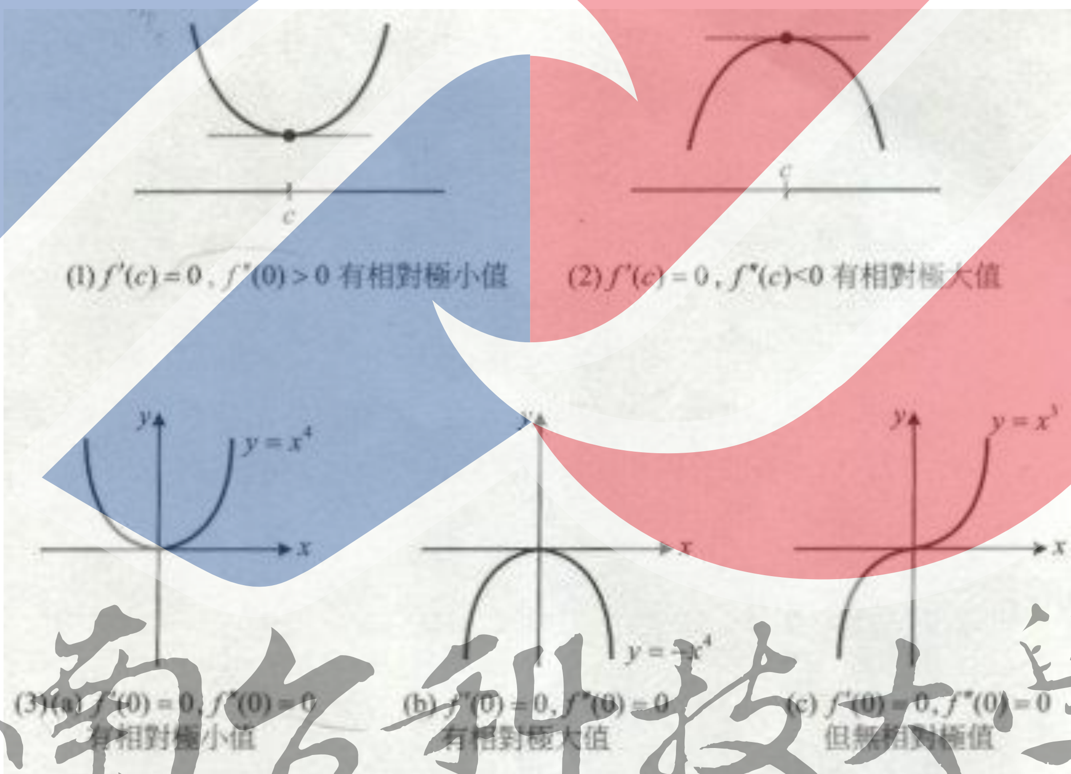

圖 5.19

例 10

利用二階導數判別法，求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+10$ 的相對極值。

隨堂練習

利用二階導數判別法，求 $f(x)=x^3-\frac{1}{4}x^2-6x+5$ 的相對極值。