

CHAPTER 5 導數的應用

5.1 遞增函數與遞減函數

習題 5.1

5.2 相對極值

習題 5.2

5.3 凹性與反曲點

習題 5.3

5.4 繪圖

習題 5.4

5.5 最佳化

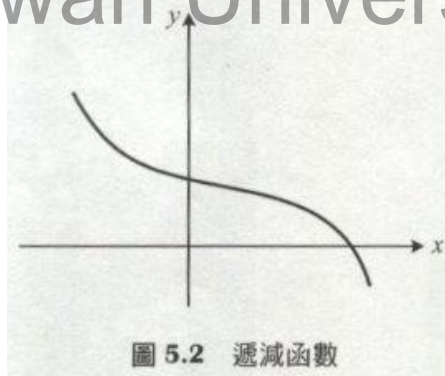
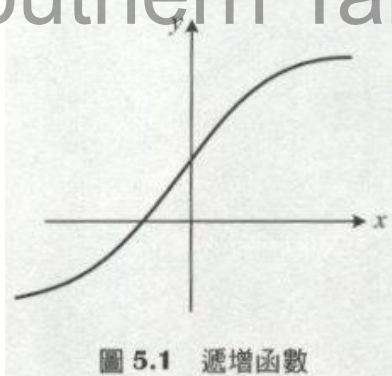
習題 5.5

診斷測驗

5.1 遞增函數與遞減函數

如果一個函數的圖形由左到右是逐漸上升，稱該函數為遞增函數（如圖 5.1）；如果函數圖由左到右是逐漸下降，稱該函數為遞減函數（如圖 5.2）。

Southern Taiwan University



我們正式定義如下。

定義 5.1

若 $f(x)$ 為定義在區間 (a,b) 的函數，且 x_1, x_2 為區間中任意兩個數。

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) > f(x_1)$ ；我們稱 $f(x)$ 在該區間**遞增**(increasing)。

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) < f(x_1)$ ；我們稱 $f(x)$ 在該區間**遞減**(decreasing)。

我們說 $f(x)$ 在點 c 遞增係指有在一個區間 (a,b) 包含 c 使得 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上是遞增。同理 $f(x)$ 在點 c 遞減係指存在一個區間 (a,b) 包含 c 使得 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上是遞減。若 $f(x)$ 在某一點的導數是正數，表示函數圖形在該點的切線斜率為正的，因此函數是遞增的；若在某一點的導數為負數，那麼函數圖形在該點的切線斜率為負的，因此函數是遞減的（如圖 5.3）

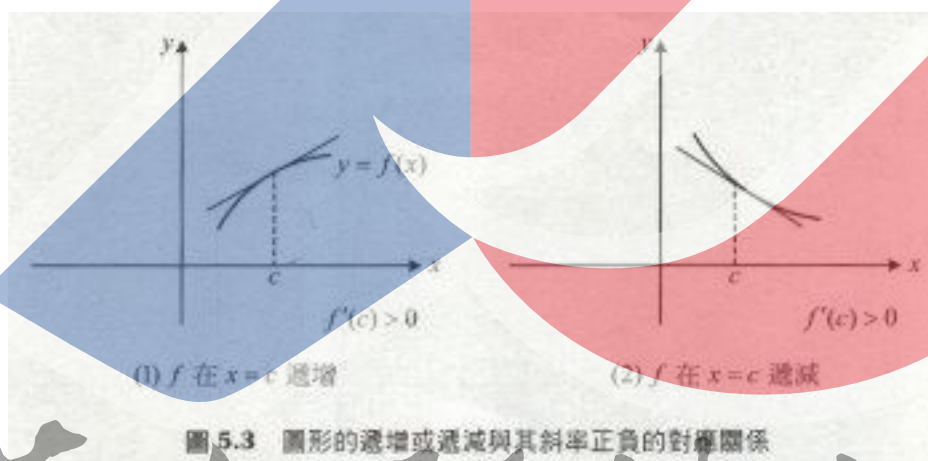


圖 5.3 圖形的遞增或遞減與其斜率正負的對應關係

因此由下面的定理，可以利用導數的正負值判斷函數是遞增或遞減。

定理 5.1

- (1) 若對於每一個開區間 (a,b) 中任意 x 值， $f'(x) > 0$ ，則 f 在 (a,b) 上為遞增。
- (2) 若對於每一個開區間 (a,b) 中任意 x 值， $f'(x) < 0$ ，則 f 在 (a,b) 上為遞減。
- (3) 若對於每一個開區間 (a,b) 中任意 x 值， $f'(x) = 0$ ，則 f 在 (a,b) 上為常數。

▶ 例 1

若 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 1$ ，試問在哪些區間 f 為遞增？在哪些區間 f 為遞減？

▶ 例 2

試求 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在哪些區間是遞增？在哪些區間是遞減？

隨堂練習

試求 $f(x) = x^2$ 在哪些區間遞增？在哪些區間遞減？

南台科技大學
Southern Taiwan University