

## 4.6

## 隱函數的微分及相關的變化率

## 4.6.1 隱函數微分

到目前為止，我們見到的方程式形式  $y=f(x)$  都把因變數  $y$  寫在等號的左邊，而右邊寫的是自變數  $x$  的式子。以這種方式表現的函數稱為顯性形式。例如下列函數

$$y = x^2 - 5 + 5, \quad y = \sqrt{1-x}, \quad y = \frac{x^2+1}{x^3+5}$$

均為顯性形式。

但我們遇到的實際問題，往往表成的函數  $y$  並不一定可寫成自變數  $x$  的顯性形式。例如下列方程式

$$x^3y^2 - y^3 + xy = 4, \quad x^2y^2 + y^4 = x - 5y$$

這些式子，我們不一定能把  $y$  求出來，我們稱此函數  $y$  是  $x$  的隱性形式。像這一類的方程式包含許多函數  $y=f(x)$ ，這些函數  $y=f(x)$  被稱為隱函數

(implicit function)。我們如何計算隱函數的  $\frac{dy}{dx}$ ？我們不必求出隱性的方程式來求出顯性形式的函數，直接利用連鎖律對函數的隱性方程式微分，這種方法稱為隱函數微分 (implicit differentiation)。

## 例 29

若  $y^2 = x^3$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。

## 隨堂練習

若  $x^2 + y^2 = 25$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。

## 例 30

若  $x^2 + y^2 = 18$ ，求過點  $(3,3)$  的切線方程式。

 例 3 1

若  $xy^2+3y-7=0$ ，求  $y'$

 隨堂練習

已知  $x^2y^3+6x^3=y+2$ ，求  $y'$ 。

 例 3 2

某生操行的記功加分，累積總加分數為  $S=3x^2+y^2$ ，其中  $x$  為該生記大功的次數， $y$  為記小功的次數。目前該生記了 10 次大功、10 次小功，若要維持目前的總加分數，增加 1 個大功，利用微積分估計小功次數必須如何變化以便抵消？

 隨堂練習

某工廠每天的產出為  $Q(x, y) = 6x^2 + 20xy + y^2$  個單位，其中  $x, y$  分別代表技術勞工 (skilled labor) 和非技術勞工 (unskilled labor) 的工作時數 (以小時計)。目前的勞動力是由 20 個技術勞工和 50 個非技術勞工組成，技術勞工工時減少 1 小時，請計算非技術勞工必須做何變化才能維持目前的產出水準。

#### 4.6.2 相關的變化率 (Related Rates)

往往在一些實際問題中，兩個變數  $x, y$  由一個方程式關連起來，而這兩個變數又都是第三個變數  $t$  的函數 (其中  $t$  往往是指時間)，那麼隱函數微分可以用來把  $\frac{dx}{dt}$  與  $\frac{dy}{dt}$  關連起來，我們稱這種問題為相關的變化率問題。

 例 3 3

未來 5 年房屋貸款戶數每年為  $N(t)$  (以萬戶為單位)，房貸年利率為  $r(t)$ ，假設它們的關係方程式為

$$4N^2 + r = 28$$

當房貸年利率為 3% 且年利率減少 0.5% 時，房屋貸款戶數的變化率為何？

▶ 例 3 4

颱風使高雄港外油輪擱淺破裂，石油從裂縫每分鐘固定溢出  $27\text{m}^3$ ，形成海上浮油形狀略似圓形，浮油厚度 2 公分。

- (a) 當油面的半徑為 50m 時，其半徑的增加會多快？
- (b) 當堵住裂縫使油不再溢出，進行修理時，油面半徑的增加率為每分鐘 0.1m，試求油溢出的總體積為何？



隨堂練習

某商品單價為  $p$  元時，製造商願意供給  $x$  千件商品，單價與供給量的關係為

$$x^2 - 2xp - p^2 = 25$$

當商品單價為 10 元時，每週的價格增加率為 1 元時，供給量的變化為何？

南台科技大學  
Southern Taiwan University