

4.5

邊際分析與利用增量求近似值

微積分是經濟學中一個很重要的工具。邊際分析是在研究經濟量的變化率。在經濟學中，當產量每增加一個單位時，導致另一個經濟量的改變，利用導數求這個改變量的近似值，我們稱此為邊際分析 (marginal analysis)。

例如，假設 $C(x)$ 為生產某商品 x 單位所需的總成本 (total cost)，而 x_0 為目前生產的單位數，則稱

$$C'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x_0 + h) - C(x_0)}{h}$$

為生產 x_0 個單位的邊際成本 (marginal cost)。取 $h=1$ 時上面極限的近似值為

$$C'(x_0) \approx \frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{1} = C(x_0 + 1) - C(x_0) \quad (1)$$

$C(x_0 + 1) - C(x_0)$ 正好就是產量從 x_0 增加為 $x_0 + 1$ ，增加一個單位的費用。

如果一個製造商生產 x 個產品所需的成本函數為 $C(x)$ ，收益 (revenue) 函數為 $R(x)$ 及利潤 (profit) 函數為 $P(x)$ ，它們之間的關係為

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

當生產量由 x 增加到 $x+1$ 時，成本與收益增減多少？利潤增減多少？這些可由 $C(x+1) - C(x)$ ， $R(x+1) - R(x)$ 以及 $P(x+1) - P(x)$ 求得，如果用線性近似值如式(1) 表示這些量，即

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

$$R'(x) \approx R(x+1) - R(x)$$

$$P'(x) \approx P(x+1) - P(x)$$

我們稱 $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$ 分別為生產量為 x 時的邊際成本 (marginal cost)、邊際收益 (marginal revenue) 及邊際利潤 (marginal profit)。

 例 2.4

某製造商製造高爾夫球桿，生產 x 支時，總成本為 $C(x) = 1^2x + x + 6$ 元，當單價為 $p(x) = 2500 - x$ 時， x 支球桿可全部售出。

- 求邊際成本、邊際收益及邊際利潤。
- 利用邊際成本估計生產第 11 支球桿的費用為何？
- 生產第 11 支球桿的真正費用為何？
- 利用邊際收益估計售出第 11 支球桿的收益為何？

- (e) 售出第 11 支球桿的真正收益為何？
- (f) 利用邊際利潤估計售出第 11 支球桿的利潤為何？

 隨堂練習

假設生產 x 單位某商品的總成本為 $C(x)=3x^2+x+500$ 。

- (a) 利用邊際成本估計生產第 31 個商品的成本為何？
- (b) 計算生產第 31 個商品的成本為何？

 例 2 5

假設生產某商品 q 個單位的總成本為 $C(q)=5q^2+q+20$ (以元為單位)，目前生產量為 50 個單位，若要生產 50.1 個單位，試估計總成本的變化如何？

 例 2 6

某種營養品花的廣告費 x (以千元計) 與總銷售額 $S(x)$ 的關係函數為

$$S(x) = -0.004x^3 + 1.2x^2 + 600 \quad (0 \leq x \leq 300)$$

若廣告費由 100,000 元增加到 103,000 元，試估計總銷售額的變化量為何？

 例 2 7

利用微差 (differential)，求 $\sqrt{17}$ 的近似值。

 隨堂練習

南方科技大學

Southern Taiwan University

 例 2 8

某國在 2000 年之後 t 年的 GDP 為 $N(t)=t^2+3t+100$ (億元)。試估計 2008 年第一季 GDP 的百分變化率。