4.4 連鎖律 (Chain Rule)

假設函數 f(x)的值在 g 的定義域中，則合成函數 g。f 在 x 的値爲

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

例如， $f(x)=x^2+x+1, g(x)=x^2$ ，則

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+x+1)=(x^2+x+1)^2$$
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=(x^2)^2+x^2+1=x^4+x^2+1$$

合成函數求導函數的規則對於求複雜函數的導函數提供了有力的工具，例如，求函數 $H(x)=(x^2+x+1)^{100}$ 的導函數，可將 H(x)表示成 $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x^{100}$ 的合成函數，也就是 H(x)=g(f(x))，再利用下面的規則來求其導函數。

定理 4.8 （連鎖律）

若 h(x)=g(f(x))且 f'(x)及 g'(u)存在，即 f(x)及 g(u)均可微分，其中 u=f(x), 則

$$h'(x)=\frac{d}{dx}[g(f(x))]=g'(f(x))f'(x)$$

如果我們令 y=h(x)=g(u)，其中 u=f(x)，則上式可記成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

定理 4.9 （一般冪次法則）

若函數 f 爲可微的，且 $h(x)=[f(x)]^n$ （n 爲實數），則

$$h'(x)=n[f(x)]^{n-1}f'(x)$$

例 2 1

若 $f(x)=(3x+1)^{72}$，求 $f'(x)$。

隨堂練習

若 $f(x)=\dfrac{1}{(3x^2-7)^2}$，求 $f'(x)$。

例 2 2

若 $f(x)=x^2(2x+1)^3$，求 $f'(x)$。

隨堂練習

若 $f(x)=(3x^2-1)^3(2x+1)^6$，求 $f'(x)$。

例 2 3

求 $f(x)=\left(\dfrac{3x+1}{5x-2}\right)^3$ 在點 $\left(0,-\dfrac{1}{8}\right)$ 的切線斜率。

隨堂練習

求 $f(x)=\left(\dfrac{5x-1}{2x+1}\right)^2$ 在點(0,1)的切線斜率。