

4.3 微分的基本規則

在上一節中求函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 時，先計算差商 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ，再令 $h \rightarrow 0$ 求差商的極限。我們觀察可知，即使對於簡單的函數，這個方法仍是繁瑣。

本節主要目的在於導出一些規則以簡化求導數的過程。

定理 4.2

若 $f(x)$ 為常數函數 $f(x)=k$ ，則 $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} k = 0$ 。

例 1.1

(a) 若 $f(x)=38$ ，則 $f'(x) = \frac{d}{dx}(38) = 0$ 。

(b) 若 $f(x)=-49$ ，則 $f'(x) = \frac{d}{dx}(-49) = 0$ 。

隨堂練習

求函數 $f(x)=1949$ 的導函數。

定理 4.3

若 n 為正整數，則 $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ 。

例 1.2

(a) 若 $f(x) = x$ ，則 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ 。

(b) 若 $f(x) = x^5$ ，則 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^5) = 1 \cdot x^{5-1} = x^4$ 。

(c) 若 $f(x) = x^{\frac{8}{3}}$ ，則 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{8}{3}}) = \frac{8}{3} x^{\frac{8}{3}-1} = \frac{8}{3} x^{\frac{8}{3}}$ 。

 隨堂練習

試求下列各函數的導函數。

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

定理 4.4

若 k 為一常數，則 $\frac{d}{dx}[kf(x)] = k \frac{d}{dx}[f(x)]$ 。


 例 1.3

(a) 若 $f(x) = 6x^4$ ，則

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(6x^4) = 6 \frac{d}{dx}(x^4) = 6(4x^3) = 24x^3$$

(b) 若 $g(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ ，則

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right) = 5 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 5 \frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{3}}) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = \frac{5}{3} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

 隨堂練習

若 $f(x) = 0.5x^{-1.2}$ ，求 $f'(x)$ 。

定理 4.5

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

▶ 例 1 4

求 $f(x) = 7x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5x - 4$ 。

▶ 隨堂練習

試求 $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x^4}$ 的導函數。

▶ 例 1 5

某新開發社區的人口數預期為

$$N(t) = 5t^2 - t + 400, 0 \leq t \leq 20$$

$N(t)$ 代表第 t 年年終時的人口數。試問 $t=5$ 和 $t=10$ 時人口的成長率為何？

▶ 隨堂練習

某飛彈在 t 秒的飛行高度（以公尺為單位）函數為

$$s(t) = -t^3 + 63t^2 + 125$$

- (a) 試求飛彈的速度函數。
- (b) 試計算 $t=10$ 時飛彈的速度。

南方科技大學
Southern Taiwan University

定理 4.6

若 $f(x), g(x)$ 均為可微分函數，則乘積 $f(x)g(x)$ 也是可微分函數，且

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

例 16

若 $f(x) = (3x^2 + 1)(2x^3 - 1)$ ，求 $f'(x)$ 。

隨堂練習

若 $f(x) = x^2(\sqrt{x} + 5)$ ，求 $f'(x)$ 。

例 17

若 $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ ，求 $f'(x)$ 。

隨堂練習

若 $f(x) = (2x+1)(3x+2)(4x+3)$ ，求 $f'(x)$ 。

定理 4.7

若 $f(x), g(x)$ 均為可微分函數，且 $g(x) \neq 0$ 則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也是可微分函數，且

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

▶ 例 1 8

若 $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ，求 $f'(x)$ 。

▶ 隨堂練習

若 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ，求 $f'(x)$ 。

▶ 例 1 9

試依下列指定方式將 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x}$ 微分：

- (a) 先將 $f(x)$ 化成帶分式，然後再微分。
- (b) 利用定理 4.7 的規則把 $f(x)$ 微分。

▶ 例 2 0

某影片的 DVD 片從發行日起 t 年的銷售金額（以百萬元為單位）為

$$s(t) = \frac{6t}{t^2 + 2}$$

- (a) 試求在 t 年時銷售金額的改變率？
- (b) DVD 片在開始發行時 ($t=0$) 銷售金額的改變率為何？在發行之後 2 年時銷售金額的改變率為何？

▶ 隨堂練習

某新開發商品上市後對舊商品的影響如下列函數

$$P(t) = \frac{t+1}{t^2+3}$$

$P(t)$ 代表 t 個月後的舊商品銷售金額（以百萬元為單位）。

- (a) 試求新商品剛上市時，舊商品銷售額的改變率為何？是增加或減少？
- (b) 在何時銷售額開始減少？