4.2 可微與連續

一個函數若處處可微分 (differentiablility)，我們稱此函數的圖形為平滑曲線。平滑曲線一定是連續的(continuity) (如下面定理 4.2)，但是連續函數不一定可微分。當連續函數的圖形在某一點 x=a 方向上急劇改變。若 f(x)在 x=a 不可微，表示 f(x)在 x=a 的導數不存在，即 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 不存在。不可微分處的點有三種：

第一種情形：在 x=a 處函數圖形為一尖點，

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\neq\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

此時其圖形在 a 點會有尖點，例如 $f(x)=|x|$ 處處連續，但在 x=0 有尖點。(如圖 4.6(a))，其它有尖點的圖形如圖 4.6(b,c)。

(a) $f(x)=|x|$ 圖　(b) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 圖　(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & x\ge 0\\ 1-x^4, & x<0\end{cases}$ 圖

圖4.6

第二種情形：在 x=a 處函數圖形有垂直切線。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty \quad ,\quad 或 \quad -\infty$$

此時函數圖形在 x=a 點的切線斜率為無限大，表示曲線在此點有垂直切線。(如圖 4.7)。

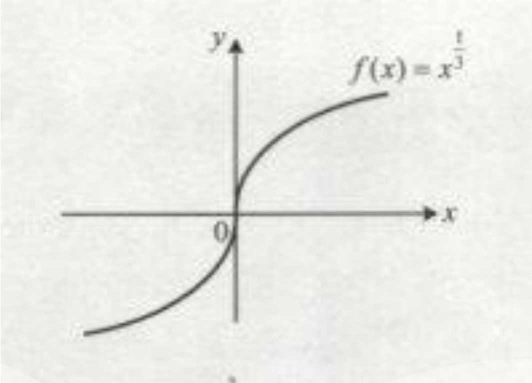

圖 4.7　$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 有垂直切線

第三種情形：在 x=a 函數圖形為不連續的點。(如圖 4.8)

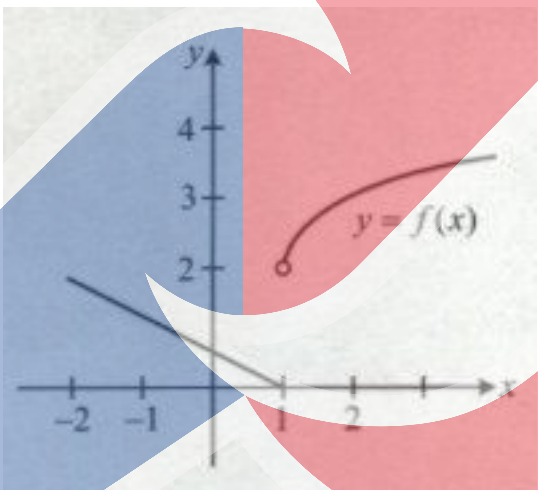

圖 4.8

例9

若函數 $f(x)=|x|$，試證 f(x)在 x=0 不可微分。

隨堂練習

若 $f(x)=\begin{cases} 15x, & 0\le x<6 \\ 20x-30, & 6\le x \end{cases}$，試證 f(x)在 x=6 時，連續但不可微分。

例10

說明下面函數 f(x)圖形，爲何在 x=a,b,c,d,e,f 不可微分。

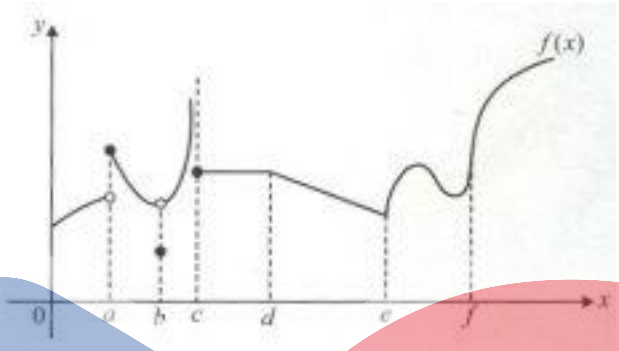

圖 4.9

定理 4.1

若函數 f(x)在 x=a 可微分，則 f(x)在 x=a 爲連續。