4.1 導數的概念

在 2.1 節，我們提到高鐵火車位置的改變相對於時間改變的比率，然後利用這個比率求瞬時速度。這個問題在數學上相當於在一個曲線上的一個點，求過該點之切線斜率。

如果高鐵火車運動的位置函數爲

$$s = f(t) = 5t^2, 0 \le t \le 30$$

其中位置 s 以公尺爲單位，時間 t 以秒爲單位。函數 f 的圖形如 4.1。

圖 4.1

由物理學的說法，瞬時速度就是平均速度的極限。以 2.1 節的例子來看，位移函數爲 $s = f(t) = 5t^2$，而運動質點在時刻 t=2 的瞬時速度爲 20，其步驟如下：

位移函數 $f(t) = 5t^2$

求 $\dfrac{\text{時刻2與時刻}t\text{位移的改變量}}{\text{時刻2與時刻}t\text{時間的改變量}}$

↓

時刻 2 與時刻 t 期間的平均速度

$$\frac{f(t) - f(2)}{t-2} = \frac{5(t^2 - 2^2)}{t-2}$$

↓ 求 t 趨近 2 時的極限

時刻 2 的瞬時速度

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}=20$$

我們把上面的過程推廣到一般的函數，也就是：給定一個函數 f(x)及一個點 a，先求 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$（稱爲差商）的值，然後取 x→a 時 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的極限。如果該極限存在，則稱它爲函數 f(x)在 x=a 的導數（derivative），以 f'(a)表之。即

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

現在，我們討論過曲線上一點的切線斜率。設曲線 C 爲函數 f(x)的圖形，P 爲 C 上一個定點，Q 爲 C 上任意異於 P 的點，則直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 稱爲**割線**。(如圖 4.2)

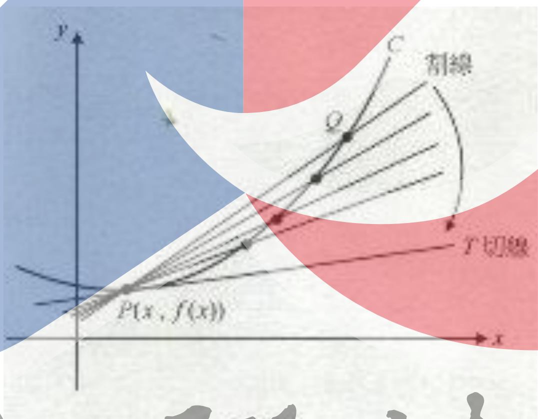

圖 4.2

當 Q 點沿著曲線往 P 點移動，過 P 點的割線會繞著定點 P 旋轉趨近於一個過 P 點的定線，這個定線爲 Q 點趨近 P 點時割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的極限位置，我們稱之爲 f 圖形在 P 點的**切線**。曲線 C 在 P 點的坐標爲 $P(x, f(x))$，而點 Q 爲 $Q(x+h, f(x+h)), h\neq 0$，我們可以令 h→0，則 Q 就會沿著曲線 C 趨近 P。(如圖 4.3)

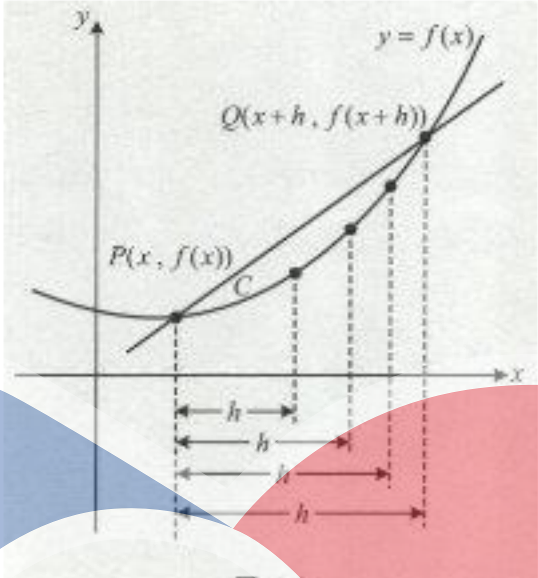

圖 4.3

割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率 (slope) 爲

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

當 h→0 時，Q 點就趨近於 P，而割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 就趨近於切線 T。因此，當 h→0 時，割線斜率就趨近於切線斜率。

如果 f 圖形在點 $P(x, f(x))$ 的切線斜率存在的話，則其斜率爲

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

前面高鐵火車在時段[2，2+h]的平均速度爲

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$ (相當於 f 圖形上過 P,Q 的割線斜率)

在 t=2 的瞬時速度爲

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$ (相當於 f 圖形在(2,f(2))切線斜率)

當 t 爲任一點 x 時，則上式變成

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

因此由以上的討論可以知道，求瞬時速度的問題就相當於曲線上求過一

點的切線斜率。

定義 4.1

我們定義 f(x)在點 x_0 的導數 $f'(x_0)$ 爲

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(若此極限存在)} \tag{4.1}$$

計算導數的過程稱爲**微分 (differentiation)**。若 $f'(x_0)$ 存在，則稱 f(x) 在 $x=x_0$ 點**可微分 (differentiable)**，記作 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $y'|_{x=x_0}$。若函數 f(x)在某區間上每個點都具有導數，則以符號 $f'(x)$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$ 或 $\frac{dy}{dx}$ 或 y' 或 $D_x f(x)$ 表示，均稱爲 f(x)的**導函數 (derivative function)**。

若令 $\Delta x = h = (x_0+h)-x_0 = (x_0+\Delta x)-x_0$ 爲 x 在 x_0 的增加量，而函數 y=f(x)的對應增加量爲 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，則函數 f(x)在 x_0 的導數定義式又可表示成

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x) \tag{4.2}$$

（微分符號 $\frac{dy}{dx}$ 是由萊布尼茲(Lebiniz)首創，$\frac{dy}{dx}$ 代表 $\Delta x\to 0$ 時，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限値。）式 (4.1) 與式 (4.2) 是等價的，要用何者，視情況方便而決定。

例 1

若 $f(x)=3x+2$，利用式 (4.1)，求導數 $f'(2)$

例 2

若 f(x)=3x+2，利用式 (4.2)，求導數 f'(2)。

隨堂練習

若 $f(x)=5x+3$，試求 $f'(3)$。

例 3

若 $f(x)=x^2$，試求 $f'(3)$。

隨堂練習

若 $f(x)=x^2+5x+1$，試求 $f'(2)$。

例 4

若 $f(x)=x^3$，求導函數 $f'(x)$。

隨堂練習

若 $f(x)=4x^3+2x+1$，求導函數 $f'(x)$。

例 5

若 $f(x)=\sqrt{x}$ ，試求 $f'(x)$ 。

隨堂練習

若 $f(x)=\sqrt{x+1}$ ，求導函數 $f'(x)$ 。

例 6

若 $f(x)=x^2+4x-2$，求：

(a) 計算 $f'(x)$。

(b) 試求 f 圖形上切線為水平線的點。

(c) 繪出 f(x)的圖形及在 (b) 中過該點的切線。

例7

若 $f(x)=x^3$，求：

(a) 計算 $f'(x)$。

(b) 求過曲線 $y=x^3$ 上 $x=1$ 的點的切線斜率。

(c) 求過 (b) 中該點的切線方程式。

隨堂練習

若 $f(x)=\frac{1}{x}$，求：

(a) 計算 $f'(x)$。

(b) 求過曲線 $y=\frac{1}{x}$ 上 $x=1$ 的點的切線斜率。

(c) 求過 (b) 中該點的切線方程式。

例8

高速鐵路火車的位移函數 $f(t)=5t^2$，試求在時刻 2 時的瞬時加速度。

隨堂練習

若一運動質點的位移函數爲 $f(t)=100t-9.8t^2$，試求在時刻 $t=3$ 的瞬時加速度。