CHAPTER 3　函數的連續性

3.1 連續函數

函數的連續性（Continuity）在整個微積分課程上扮演很重要的角色。直觀言之，一個函數在某一點連續，係指該函數圖形在該點沒有破洞，跳躍、斷裂或暴衝。例如，下列圖 3.1，我們注意 f 在 x=a,x=b,x=c 以及 x=d 這些點的狀況。首先，由圖可知 f 在 x=a 沒有定義，導致 f 圖形有一個破洞。其次，觀察 f 圖形在該點呈現**跳躍**。在 x=c 時 f(x)的左極限不等於右極限，f(x)在 x=c 沒有極限，導致 f 圖形在該點**斷裂**。f 在 x=d 時極限不存在，導致 f 圖形**暴衝**。函數 f 在這些點都是**不連續**(discontinuous)，而其它的點都是**連續的**(continuous)。

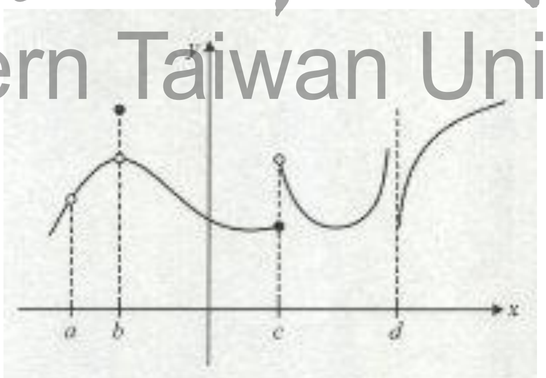

圖 3.1

因此，函數 f(x)的圖形在 x=a 不中斷（連續），必須定義如下：函數 f(x)在 x=a 為連續，必須滿足以下三個條件：(1) f(a)要有定義；(2) $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在；(3) $\lim_{x\to a} f(x)$=f(a)。

若 f 在 x=a 不是連續，則稱 f 在 x=a 不連續。若 f 在區間上每一點均連續，則稱 f 在該區間連續(continuous on the interval)。

圖 3.2 描述在區間(a,b)上一個連續函數的圖形，也就是我們能夠筆不離紙一氣呵成地把函數圖形繪製完成。

圖 3.2

例 1

下列各函數中，求出函數為連續的 x 值。

(a) $f(x) = x - 1$

(b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x-1, & x \neq -1 \\ 2, & x = -1 \end{cases}$

(d) $M(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

(e) $N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ -2, & x \leq 0 \end{cases}$

定理 3.1

(1) 常數函數 f(x)=k 在任意 x 值都連續(continuous everywhere)。

(2) f(x)=x 在任意 x 值都連續。

若 f(x)和 g(x)在 x=a 爲連續，則

(3) $[f(x)]^n$ 在 x=a 爲連續，其中 n 爲實數。

(4) f(x)±g(x)在 x=a 爲連續。

(5) f(x)g(x)在 x=a 爲連續。

(6) 如果 g(a)≠0，則 f(x) / g(x)在 x=a 也連續。

利用上述定理，我們可以證得下面的結果：

定理 3.2

任意實係數多項式 $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 處處都連續，即

$\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$。

由於有理函數 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 爲兩個多項式 p(x)及 q(x)的商，因爲

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\lim_{x\to a}p(x)}{\lim_{x\to a}q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}$$

其中 q(a)≠0，故有理函數在它的定義域範圍也都是連續的。

例 2

下列各函數中，試求出函數連續的 x 值。

(a) $f(x)=x^5-4x^4+2x^3-5x+1$ (b) $g(x)=\dfrac{9x^{11}-5x-1}{x^2+1}$

(c) $h(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2-2x-3}$

隨堂練習

找出使函數 f(x)不連續的 x 值。

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$　　　　(b) $f(x)=6x^2-5x-3$

請注意，連續函數的合成函數也是連續函數。

定理 3.3

若函數 g 在 a 點連續且函數 f 在 g(a)點連續，則 f。g 在 a 點連續，即

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

例如，$\sqrt[3]{5+x^2}$ 爲一連續函數，因爲多項式函數 $g(x)=5+x^2$ 與立方根函數 $f(y)=\sqrt[3]{y}$ 均爲連續函數，而 $\sqrt[3]{5+x^2} = f(g(x))$ 。

例 3

利用合成函數的連續性，求 $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{5+x^2}$ 。

隨堂練習

若 $f(x)=\left[\dfrac{x^3-3}{(x-1)^2}\right]$，試討論 $f(x)$ 的連續性。

例 4

試討論 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ 在區間 $-1<x<2$ 以及在區間 $-1\le x\le 2$ 的連續性。

3.2 中間值定理

由連續的條件，我們可以得到下列的結果。

定理 3.4（中間值定理）

若 f(x)在閉區間[a,b]上連續，且 $f(a) \neq f(b)$，則對於任意介於 f(a)與 f(b)之間的實數 M，至少存在一個 $c \in (a,b)$ 使得 f(c)=M (如圖 3.3)

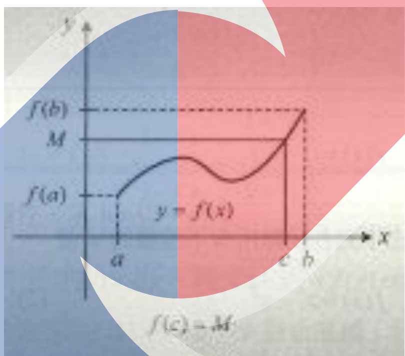

圖 3.3

由圖形觀之，f(x)在區間[a,b]上為連續的，故任何介於 f(a)與 f(b)的值 M，一定可以找到一點 c 與之對應，即 f(c)=M。

定理 3.5 勘根定理

若函數 f(x)在閉區間[a,b]上連續，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，則必存在 $c\in(a,b)$ 使得 f(c)=0 (如圖 3.4)

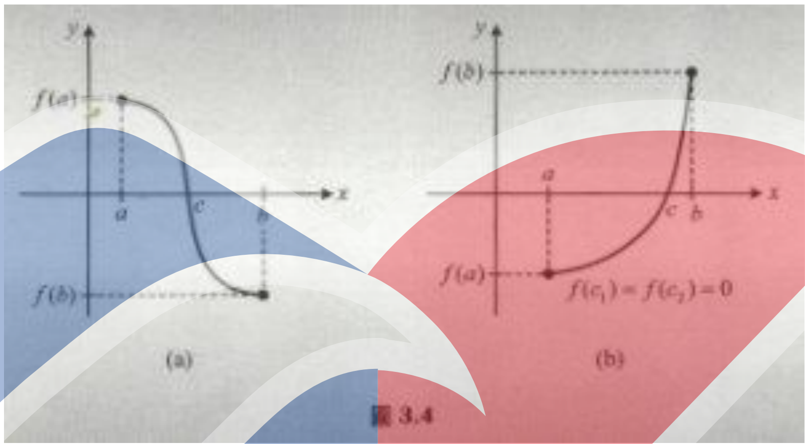

圖 3.4

由圖形觀之，連續函數的圖形不論從 x 軸上方走到 x 軸下方，或由 x 軸下方走到 x 軸上方，一定要與 x 軸相交，即存在一點 $c\in(a,b),\ f(c)=0$ （應用中間值定理 (intermediate value theorem)，M=0）

例 5

試證 $x^3+x+1=0$ 在區間(-1,1)上有一解。

隨堂練習

試證 $x^3+x-1=0$ 在區間(-1,1)上有一解。