CHAPTER 2 極　限

2.1 極　限

2.1.1 函數極限的概念

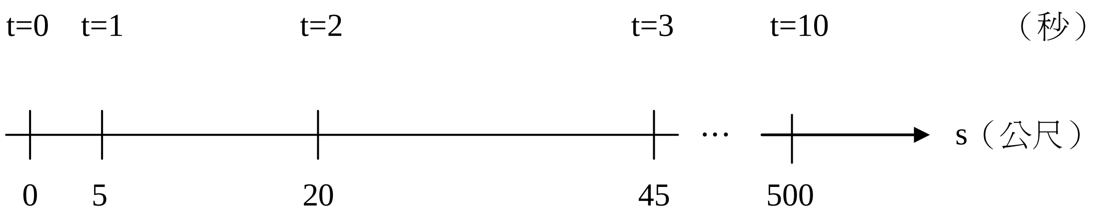
高速鐵路的火車沿著直線（x 軸）軌道運動，在時刻 t（秒）時，它的位置（公尺）在 x 軸上的座標為

$$s=f(t)=5t^2 \quad ((0\le t\le 30)$$

我們稱 f 為高鐵火車的**位置函數**。

高鐵火車在 t=0,1,2,3,⋯,10 時，火車離出發點的位置分別為

$f(0)=0, f(1)=5, f(2)=20, f(3)=45, \cdots, f(10)=500$(公尺)



假如我們想求高鐵火車在 t＝2 時的速度，也就是在速度儀表上所顯示的瞬間速度。我們可以計算一個時段內的平均速度。例如，在 t=2 到 t=4 這個時段內的平均速度爲

$$\frac{\text{走過的距離}}{\text{經過的時間}}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5\cdot 4^2-5\cdot 2^2}{4-2}=\frac{60}{2}=30$$

平均速度爲 30 公尺 / 秒，雖然不是 t=2 的速度，但卻提供了該時刻瞬時速度的近似值。直覺地，我們縮短這個時段可得到較好的近似值。我們考慮時刻 2 與任何時刻 t(>2)這個時段高鐵火車的平均速度爲

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{5t^2-5\cdot 2^2}{t-2}=\frac{5(t^2-4)}{t-2}$$

將時刻 2 與時刻 t 間時段的長度逐漸縮短，這種情形稱之爲 **t 趨近 2**；**逐漸縮短 2 與 t 間時段長度來觀察** $\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$ **的變化情形**的工作，用數學術語言之，便是**當 t 趨近 2 時，求函數** $\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$ **的極限**，我們用 t→2 表示 t 趨近 2，以 lim 表示極限(limit)，而當 t 趨近 2 時，$\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$ 的極限表爲：

$$\lim_{t\to 2}\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$$

這個極限值便是高鐵火車在時刻 2 的瞬時速度。

現在我們討論當 t 趨近 2 時，$\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$ 的極限。當我們使用 t 趨近 2 這樣的詞句，就表示 t≠2 了。

因爲 t≠2，所以

$$\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}=5(t+2)$$

當 t“差不多”是 2 時，$\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$ 或 $5(t+2)$ 就“差不多”是 20；這表示：當 t 趨近 2 時，$\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}$ 的極限爲 20；用式子表示則是

$$\lim_{t\to 2}\frac{5(t^2-2^2)}{t-2}=20$$

前面所謂“當 t 差不多是 2 時，$5(t+2)$ 就差不多是 20”，這種講法也可透過實際計算來觀察。令 $g(t)\frac{5(t^2-4)}{t-2}$

t 從左邊趨近 2

t	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	愈接近 2
g(t)	17.5	19.5	19.95	19.995	19.9995	愈接近 20

$\frac{5(t^2-4)}{t-2}$ **從左邊趨近 20**

t 從右邊趨近 2

t	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	愈接近 2
g(t)	22.5	20.5	20.05	20.005	20.0005	愈接近 20

$\frac{5(t^2-4)}{t-2}$ **從右邊趨近 20**

從上面這兩個函數值表，可以看出：當 t 差不多是 2 時，$\frac{5(t^2-4)}{t-2}$ 就差不多是 20，也就是

$$\lim_{t\to 2} g(t)=\lim_{t\to 2}\frac{5(t^2-4)}{t-2}=20$$

隨堂練習

試在下列二表中填入正確數值並觀察 $\lim_{t\to 4}\frac{t^2-4^2}{t-4}$ 之值：

t	3	3.5	3.9	3.95	3.99	3.999	愈接近 4
$\frac{t^2-4^2}{t-4}$							

t	5	4.5	4.1	4.05	4.01	4.001	愈接近 4
$\frac{t^2-4^2}{t-4}$							

例 1

隨堂練習

例 2

若函數 $f(x)=\begin{cases} -1\text{，當}x<0 \\ 1\text{，當}x\geq 0 \end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 之值。

隨堂練習

若函數 $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ，試求 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 之值。

2.1.2　極限的求法

$\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ 的意義是：當 x 趨近 2 時，x^2 的極限爲 4。我們已經看出：極限 4 就是 x 用 2 代入所得的值。事實上，要求 $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ 的值，確實可以把 x^2 中的 x 用 2 代入便可。但要計算 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 時，卻不可以把 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 中的 x 用 2 代入，否則會出現 $\dfrac{0}{0}$ 這個無意義的結果。求函數極限有時可以直接將 x 值代入求得，有時又不可以，其間區別何在？

假定我們要計算 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ，只要把 f(x)中的 x 用 a 代入，不會出現分母爲 0 這種無意義的情形，則

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

也就是所求的極限就是將 f(x)中的 x 用 a 代入所得的值。

例 3

試求 $\lim_{x \to 3}(4x^2 - 2x + 1)$ 之值。

隨堂練習

(a) 試求 $\lim_{x \to 2}(x^2 + 1)(x^2 - 4)$ 之值。

(b) 試求 $\lim_{x \to 3} 5$ 之值。

例 4

試求 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 之值。

隨堂練習

試求 $\lim_{x \to -1} \frac{2x + 1}{x + 2}$ 之值。

例 5

試求 $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{2x + 1}}$ 之值。

隨堂練習

試求 $\lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x^2 + 7}}{2x - \sqrt{2x + 3}}$ 之值。

例6

試求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ 之值。

隨堂練習

試求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 之值。

例7

試求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}$ 之值。

隨堂練習

試求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ 之值。

例8

試求 $\lim\limits_{x\to 3}\left(4x^2-2x+1+\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$ 之值。

隨堂練習

試求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$ 之值。

例9

試求 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ 之值。

隨堂練習

試求 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)$ 之值。

合成函數的極限定理

假設 f(x)與 g(x)爲二函數且合成函數 g(f(x))存在，若 $\lim_{x\to a} f(x)=b$，$\lim_{y\to b} g(y)=g(b)$，則 $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))=g(b)$。

例10

求 $\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-4x+1}{x+5}}$ 之值。

2.2 單邊極限

當我們說 x 趨近 a 時，函數 f(x)的極限爲 l，是指當 x 很接近 a 時，f(x)就很接近 l；其中的 x 很接近 a 包含了 x 自點 a 的右方（即 x>a）趨近 a 時及 x 自點 a 的左方（即 x<a）趨近 a 這兩種情形，不論 x>a 或 x<a，只要 x 很接近 a，則 f(x)都會很接近 l。必須有這樣的性質，才能寫成 $\lim_{x\to a} f(x)=l$。如果沒有一個 l 具有這種性質，我們就說當 x 趨近 a 時，f(x)極限不存在。

例11

試求 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 之值。

定理 2.1

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

例12

隨堂練習

例13

設 $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x>0 \\ x^2, & x\le 0 \end{cases}$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$之值。

隨堂練習

設 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+8}, & x\ge 1 \\ 2+\sqrt{x}, & x<1 \end{cases}$，求 $\lim_{x\to 1} f(x)$之值。