

# CHAPTER 1 預備知識

## 1.1 函數及其圖形

1.1.1 函數的概念

1.1.2 函數的圖形

1.1.3 合成函數

習題 1.1

診斷測驗

## 1.1 函數及其圖形

### 1.1.1 函數的概念

在自然現象與社會現象中，有許多有關於“量”的問題。在各種量中，有些量是不會改變的，但有些量是會變動的，會變動的量稱之為“變量 (variable)”；例如，正方形的面積大小的量就是一個變量；同樣地，線段長度的量也是一個變量。

兩個變量之間若存在一個明確的關係，也就是某變量的值是由另一個變量的值來決定時，它們可能成為數學要探討的一個主題。例如，

正方形的面積  $y$  平方公尺與邊長  $x$  公尺之間的關係： $y=x^2$

當  $x=1$  時， $y=1$

當  $x=2$  時， $y=4$

⋮

對於每一個  $x$  值已知時，就有一個且只有一個對應的  $y$  值；像這樣的關係，我們說「 $y$  是  $x$  的**函數(function)**」。當  $y$  是  $x$  的函數時，稱變量  $y$  為**應變量(dependent variable)**，而變量  $x$  則稱為**自變量(independent variable)**。通常以  $f$  表示函數，而函數  $f$  把  $x$  對應到  $y=f(x)$ ，函數是一

種對應關係。

### ▶ 例 1

設  $x, y$  兩個變量之間的關係為  $y=x^2$ 。

- (a) 若以  $y$  為自變量，以  $x$  為應變量，則  $x$  須滿足  $x^2=y$ 。令  $y=4$  則  $x=\pm 2$ ，即一個  $y$  值為 4，其對應的  $x$  值為 2 與 -2(有兩個值)， $x$  值並非唯一，因此這種關係， $x$  不是  $y$  的函數。
- (b) 若以  $x$  為自變量，以  $y$  為應變量，對於任一  $x$  值，恰有一  $y$  值， $y=x^2$ ，與之對應。因此  $y$  是  $x$  的函數。

### ▶ 例 2

假設對於每一個實數  $x, f(x)=x^2$ 。試求 (a)  $f(2)$ ；(b)  $f(1.1)$ ，以及 (c)  $f(-\sqrt{3})$ 。

### ▶ 例 3

用多項式定義的函數稱為多項式函數。例如

- (a)  $y=ax+b$ ( $a, b$  為常數)稱為一次函數或線性函數(linear function)。
- (b)  $f(x)=4x^2+4x+1$  為一個二次函數。

### ▶ 例 4

函數  $f(x)=\frac{1}{x}$  的定義域為何？

### ▶ 例 5

求函數  $f(x)=5+\sqrt{3-x}$  之定義域。

### 隨堂練習

求函數  $f(x)=\sqrt{3-x}+\frac{1}{x}$  的定義域。

南方科技大學  
Southern Taiwan University

## 1.1.2 函數的圖形

設有一函數對應域，其定義域為  $A$ ，則在坐標平面上，所有  $(x, f(x))$ ， $x \in A$  的點所成的集合，稱為  $f(x)$  的圖形，也就是

$$\text{函數 } f(x) \text{ 的圖形} = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

通常要繪出一個函數的圖形是儘量多給一些  $x$  值，求得一連串的坐標

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

然後把這些點連結起來便可得到該函數的近似圖形。

### 例 6

試繪出  $f(x) = 2x + 1$  的圖形。

### 隨堂練習

試繪出絕對值函數  $y = |x|$  的圖形。

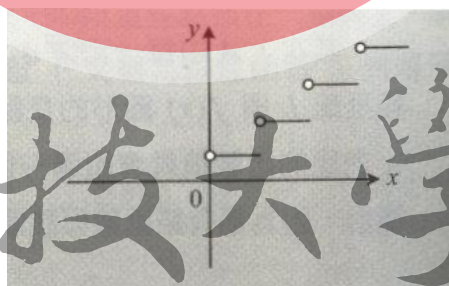
### 隨堂練習

以  $x$  為自變量， $y$  為應變量，下列何者是函數圖形？何者不是函數圖形？

(a)



(b)



Southern Taiwan University

## 1.1.3 合成函數

如果有兩個函數  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ ，且對於每一個在  $A$  中之元素  $x$ ，其函數值  $g(x)$  在  $f$  的定義域內，則  $g(x)$  在  $f$  的對應下可得到函數值  $f(g(x))$ 。因此，存在一個從  $A$  到  $C$  的函數：

$$f \circ g: A \rightarrow C$$

將 A 中任一元素  $x$  對應到  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ，我們稱此函數  $f \circ g$  為  $g$  與  $f$  的合成函數。

### 例 7

若  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ,  $g(x) = 2x+3$ ，求  $f \circ g$  和  $g \circ f$  及其定義域。

#### 隨堂練習

已知函數  $f(x) = 1+2x$  與  $g(x) = x^2$ 。求  $f \circ g$  和  $g \circ f$ ，並比較  $(f \circ g)(x)$  與  $(g \circ f)(x)$  是否相等。

### 例 8

將  $P(x) = (x+1)^3$  寫成合成函數  $g \circ f$  的形式。

#### 隨堂練習

試將  $f(x) = |x^2 - 2x + 3|$  寫成多個函數的合成。

南台科技大學  
Southern Taiwan University