3-4 函數的凹性與二階導數檢定法

定義 3.11 凹性(concavity)

令 f 在開區間 (a,b) 為可微分函數。

(1) 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 是遞增的，則 f 的圖形在 (a,b) 為凹口向上或上凹(concave upward)。如圖 3-11a

(2) 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 是遞減的，則 f 的圖形在 (a,b) 為凹口向下或下凹(concave downward)。如圖 3-11b

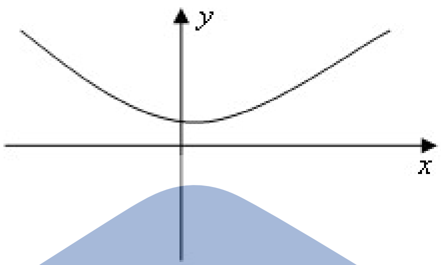

圖 3-11a

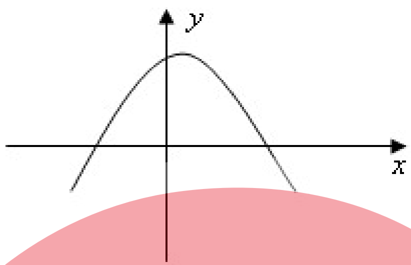

圖 3-11b

定理 3.12　凹性檢定法

(1) 若 $f''(x)>0$ 對所有 $x\in(a,b)$，則 $f(x)$ 在 (a,b) 上的圖形為上凹。

(2) 若 $f''(x)<0$ 對所有 $x\in(a,b)$，則 $f(x)$ 在 (a,b) 上的圖形為下凹。

證：

(1) 因為 $f''(x)>0$ 對所有 $x\in(a,b)$，則 $(f')'(x)>0$ 對所有 $x\in(a,b)$。所以 $f'(x)$ 在 (a,b) 為遞增，由定義 3.11 知 f 的圖形在 (a,b) 為上凹。

(2) 同(1)的證法。

例題 1. 試找出函數 $f(x)=x^2$ 圖形的上凹或下凹區間。

解：

定義 3.13　反曲點 (point of inflection)

若函數 $f(x)$ 在 c 點連續且圖形在 $(c,f(c))$ 的凹性改變，則稱 $(c,f(c))$ 為函數 $f(x)$ 的反曲點。(看圖 3-12)

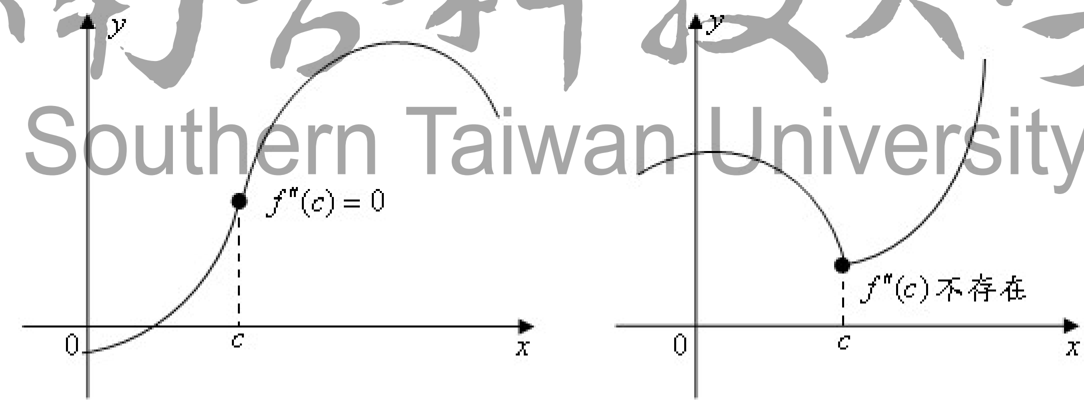

圖 3-12

定理 3.14

若 $(c,f(c))$ 為函數 f 圖形的反曲點，則 $f''(c)=0$ 或不存在。

註:此定理反之不然，例如函數 $f(x)=x^4$，則 $f''(0)=0$。但是 $(0,f(0))=(0,0)$ 並不是反曲點，看圖 3-13。

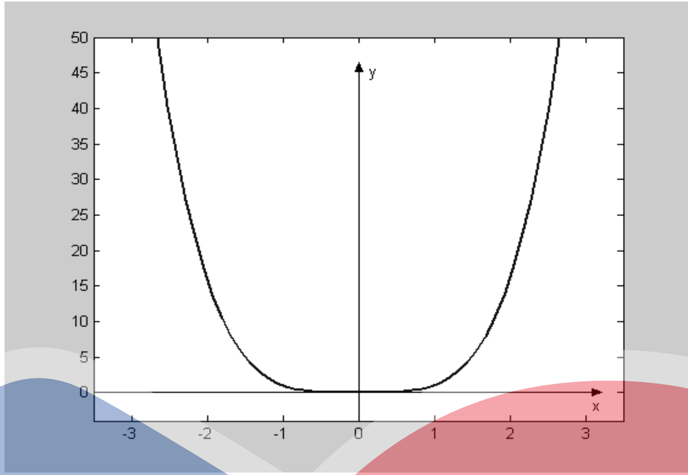

圖 3-13

例題 2.1. 討論函數 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$ 的凹性及反曲點。

解：

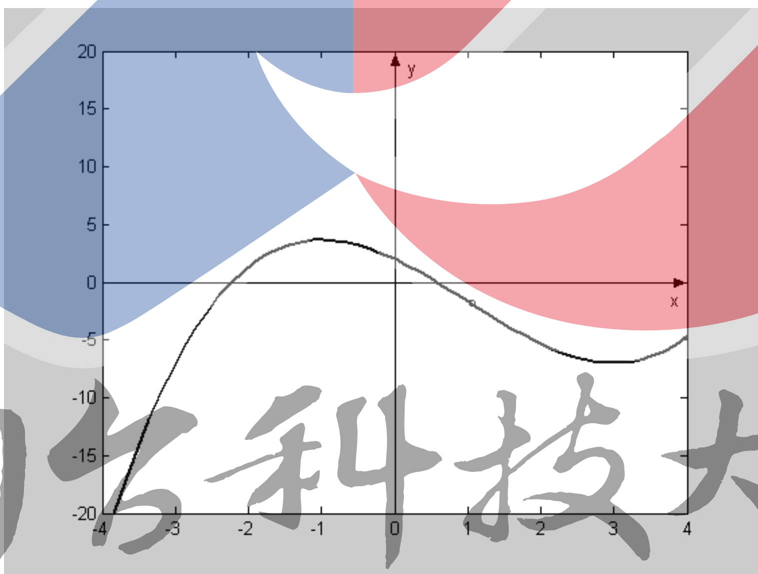

圖 3-14

課堂練習：討論函數 $f(x)=x^3+2$ 的凹性及反曲點。

解：

例題 2.2. 討論函數 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$ 的凹性及反曲點。
解：

例題 2.3. 討論函數 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 的凹性及反曲點。

解：

定理 3.15　二階導數檢定法

假設 f 為定義在開區間 (a,b) 的二階可微函數，令 $c\in(a,b)$ 且 $f'(c)=0$，

(1) 若 $f''(c)>0$，則 $f(c)$ 為相對極小值。

(2) 若 $f''(c)<0$，則 $f(c)$ 為相對極大值。

例題 3.1. 試求函數 $f(x)=-3x^5+5x^3$ 的相對極值。
解：

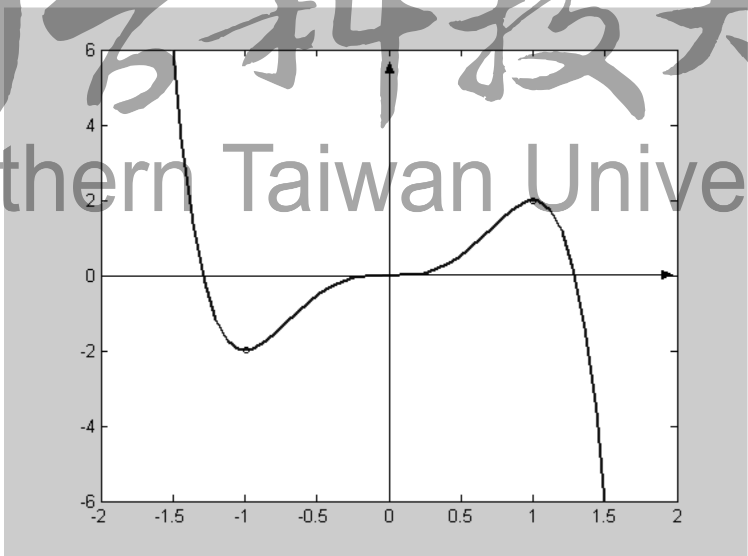

圖 3-16

課堂練習：試求函數 $f(x)=x^4-4x^3$ 的相對極值。

解：

例題 3.2. 試求函數 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，$x>0$ 的相對極值。

解：