

2. 極值

(1) 函數的極值與均值定理

定義 3.1 設函數 f 定義在區間 I 上且 $x_0 \in I$ 。

- (1) 若對所有 $x \in I$ 恆有 $f(x_0) \leq f(x)$ ，則 $f(x_0)$ 稱為函數 f 之絕對極小值 (absolute minimum)；
- (2) 若對所有 $x \in I$ 恆有 $f(x_0) \geq f(x)$ ，則 $f(x_0)$ 稱為函數 f 之絕對極大值 (absolute maximum)。

定義 3.2 設函數 f 定義在區間 I 上且 $x_0 \in I$ ，若存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ 有

- (1) $f(x_0) \leq f(x)$ ，則 $f(x_0)$ 稱為 f 之相對極小值 (relative minimum) 或局部極小值 (local minimum)；
- (2) $f(x_0) \geq f(x)$ ，則 $f(x_0)$ 稱為 f 之相對極大值 (relative maximum) 或局部極大值 (local maximum)。

例題 1. 若圖 3-1 為函數 $y = f(x)$ ， $x \in [a, b]$ 的圖形。

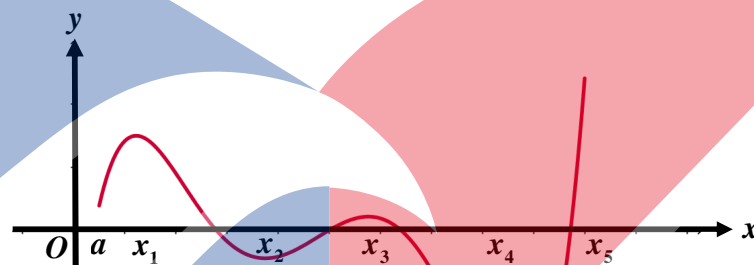


圖 3-1

例題 2. 若 $f(x) = x^2$ ，由圖 3-2 我們可得到 $f(0) \leq f(x)$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 。因此 $f(0) = 0$ 為 f 的絕對極小值。然而，由函數圖形我們可以看出，此函數無絕對或相對極大值。

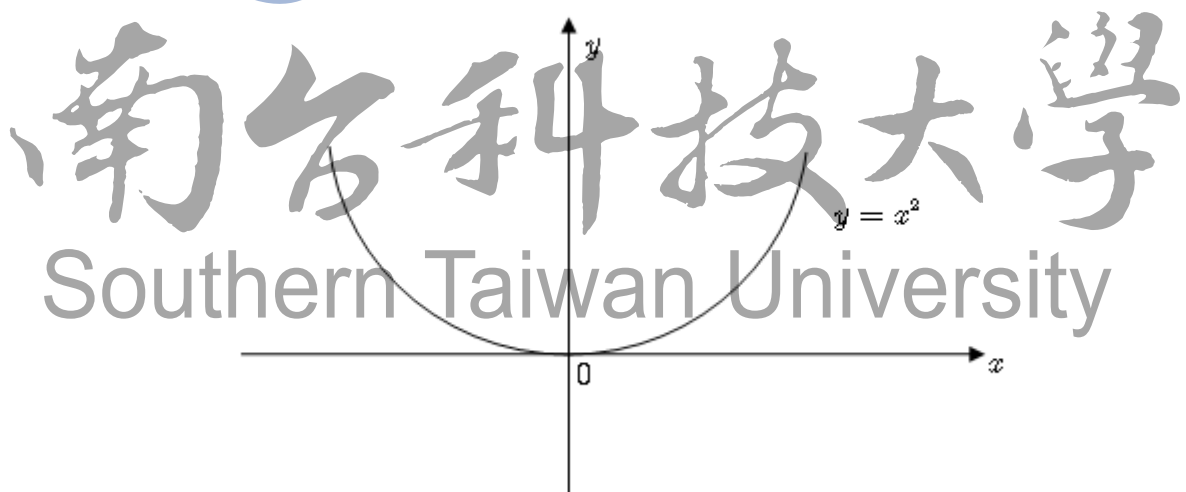


圖 3-2

例題 3. 若 $f(x) = x^3$ ，則由圖 3-3，我們可以很清楚的看出此函數無任何的極小或極大值。

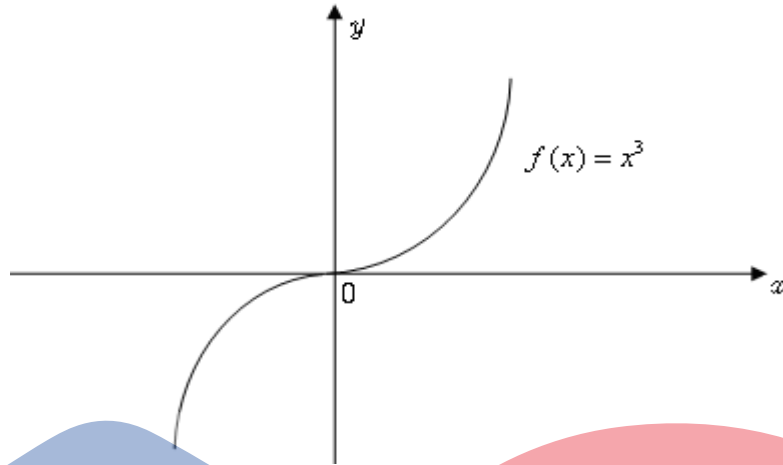


圖 3-3

課堂練習：若 $f(x) = 2x$ ，此函數是否有極小或極大值。

定理 3.3 極值定理

若 f 為定義在閉區間 $[a, b]$ 之連續函數，則 f 在 $[a, b]$ 上必有極大值與極小值。

定理 3.4 費瑪定理(Fermat's Theorem)

若函數 $f(x)$ 在 c 點產生相對極值且 $f'(c)$ 存在，則 $f'(c) = 0$ 。

註 1：上述定理提供求相對極值的一個必要條件，既反之不然。如例題 3 的 $f(x) = x^3$ ，其 $f'(0) = 0$ ，但由圖 3-3 知 $f(0)$ 非極值。

註 2：事實上，極值可能發生在(1) $f'(c) = 0$ 之 c 點(如圖 3-4a 的 x_1, x_2)；(2) $f'(c)$ 不存在之 c 點(如圖 3-4b 的 x_3, x_4)；(3)端點(如圖 3-4c 的 a, b)。

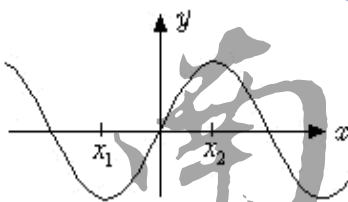


圖 3-4a

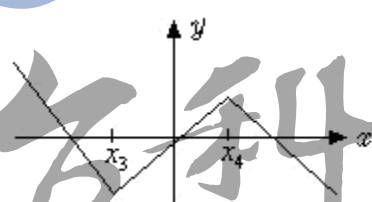


圖 3-4b

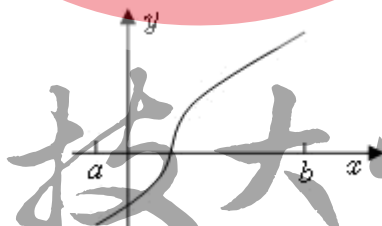


圖 3-4c

定義 3.5 臨界點 (Critical point)

若 $f'(c) = 0$ 或不存在，則點 c 稱為 f 的臨界點。

註：由圖 3-4 知，極值可能發生在①臨界點②端點(若函數定義在閉區間)。

例題 4.1. 求 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 的所有臨界點？

解：

課堂練習：求 $f(x) = 2x^3 - 24x$ 的所有臨界點？

解：

例題 4.2. 求 $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4-x)$ 的所有臨界點？

解：

例題 4.3. 求 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 的所有臨界點？

解：

例題 4.4. 求 $f(x) = xe^{-x}$ 的所有臨界點？

解：

例題 4.5. 求 $f(x) = x \ln x$ 的所有臨界點？

解：

由定理 3.3 知，若函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大及最小值產生。而如何找出它的極值呢？一般來說，我們可依下列四個步驟來完成：

Step 1. 求出 f 在 (a, b) 的臨界點。

Step 2. 計算出各臨界點所對應的函數值。

Step 3. 計算出端點的函數值。

Step 4. 比較 Step 2-3 中的函數值，最小者為最小值，最大者為最大值。

例題 5. 找出 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 在 $[-1, 2]$ 中的極值。

解：

課堂練習：求 $f(x) = 2x^3 - 24x + 2$ 在 $[0, 3]$ 中的極值。

解：

定理 3.6 Rolle's 定理

設函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 連續且在開區間 (a, b) 可微。若 $f(a) = f(b)$ ，則存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

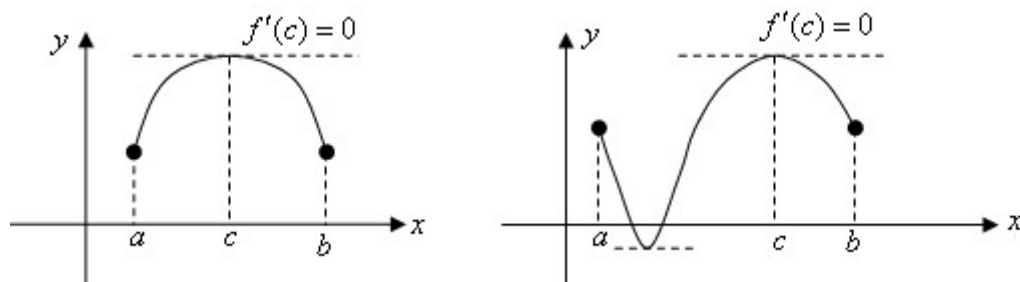


圖 3-5

證：

Case 1. 若 $f(x) = f(a)$ 對所有 $x \in [a, b]$ ，既 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上為常數函數，則 $f'(x) = 0$ 對所有 $x \in (a, b)$ ，因此得證。

Case 2. 若存在 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) > f(a)$ 。根據極值定理，存在 $c \in [a, b]$ 使得函數 f 在點 c 為極大值。因為 $f(c) > f(a)$ ，這表示極大值不是發生在邊界點。因此 f 在開區間 (a, b) 有極大值，由此我們可得到 $f(c)$ 為一個相對極大值。又函數 f 在開區間 (a, b) 可微。如此可得 $f'(c) = 0$ 。

Case 3. 若存在 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) < f(a)$ ，證明同 Case 2。

例題 6. 設函數 $f(x) = x^4 - 2x^2$ ，試求所有的 $c \in (-2, 2)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

解：

課堂練習：設函數 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ，試求所有的 $c \in (1, 2)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

解：

南方科技大學

定理 3.7 均值定理 (The Mean Value Theorem)

設函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 連續且在開區間 (a, b) 可微。則存在至少一點 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

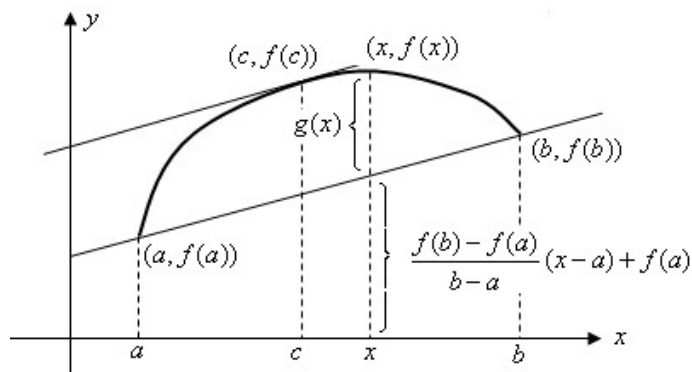


圖 3-6

證：首先，考慮通過 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 兩點的割線方程式

$$y = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) + f(a)$$

令

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) + f(a) \end{aligned}$$

因為 $g(a) = g(b) = 0$ 且 g 在閉區間 $[a, b]$ 連續，在開區間 (a, b) 可微。根據 Rolle's 定理，存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

移項即完成此證明。

例題 7. 令函數 $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$, $x \in [1, 4]$ ，求出滿足均值定理的 c 值。

解：

課堂練習：令函數 $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \in [0, 1]$ ，求出滿足均值定理的 c 值。

解：

南台科技大學
Southern Taiwan University