2. 極值

(1) 函數的極值與均值定理

定義 3.1 設函數 f 定義在區間 I 上且 $x_0 \in I$。

(1) 若對所有 $x \in I$ 恆有 $f(x_0) \le f(x)$，則 $f(x_0)$ 稱為函數 f 之絕對極小值(absolute minimum)；

(2) 若對所有 $x \in I$ 恆有 $f(x_0) \ge f(x)$，則 $f(x_0)$ 稱為函數 f 之絕對極大值(absolute maximum)。

定義 3.2 設函數 f 定義在區間 I 上且 $x_0 \in I$，若存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ 有

(1) $f(x_0) \le f(x)$，則 $f(x_0)$ 稱為 f 之相對極小值(relative minimum)或局部極小值(local minimum)；

(2) $f(x_0) \ge f(x)$，則 $f(x_0)$ 稱為 f 之相對極大值(relative maximum)或局部極大值(local maximum)。

例題 1. 若圖 3-1 為函數 $y = f(x),\ \ x \in [a,b]$ 的圖形。

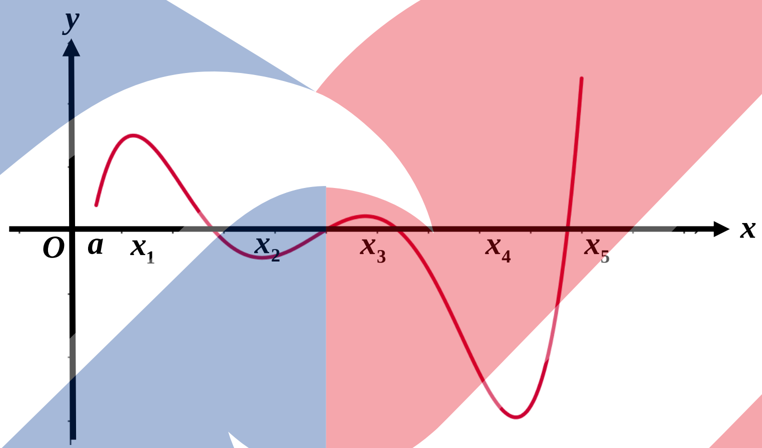

圖 3-1

例題 2. 若 $f(x) = x^2$，由圖 3-2 我們可得到 $f(0) \le f(x)$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$。因此 $f(0) = 0$ 為 f 的絕對極小值。然而，由函數圖形我們可以看出，此函數無絕對或相對極大值。

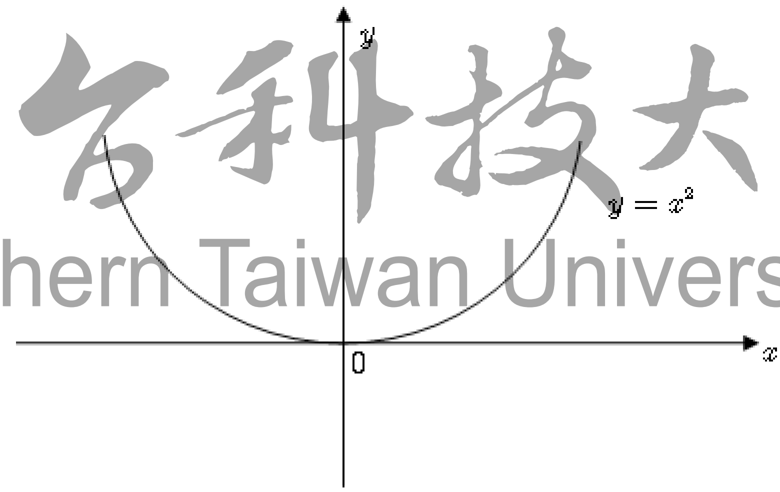

圖 3-2

例題 3. 若 $f(x)=x^3$，則由圖 3-3，我們可以很清楚的看出此函數無任何的極小或極大值。

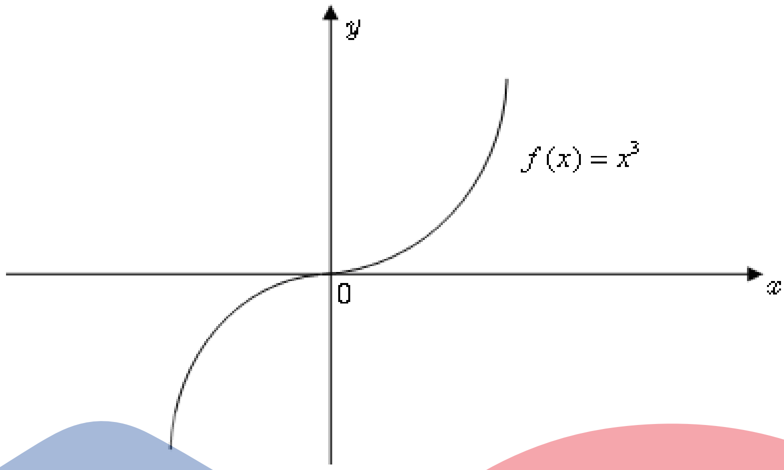

圖 3-3

課堂練習：若 $f(x)=2x$，此函數是否有極小或極大值。

定理 3.3　極值定理

若 f 為定義在閉區間$[a,b]$之連續函數，則 f 在$[a,b]$上必有極大值與極小值。

定理 3.4　費瑪定理(Fermat's Theorem)

若函數 $f(x)$ 在 c 點產生相對極值且 $f'(c)$ 存在，則 $f'(c)=0$。

註 1：上述定理提供求相對極值的一個必要條件，既反之不然。如例題 3 的 $f(x)=x^3$，其 $f'(0)=0$，但由圖 3-3 知 $f(0)$ 非極值。

註 2：事實上，極值可能發生在(1) $f'(c)=0$ 之 c 點(如圖 3-4a 的 x_1,x_2)；(2) $f'(c)$ 不存在之 c 點(如圖 3-4b 的 x_3,x_4)；(3)端點(如圖 3-4c 的 a,b)。

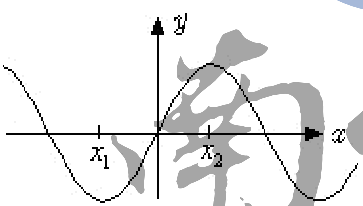

圖 3-4a

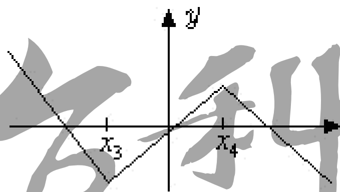

圖 3-4b

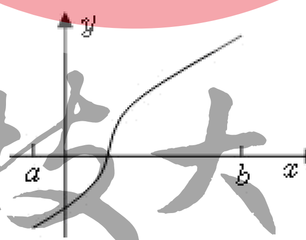

圖 3-4c

定義 3.5　臨界點 (Critical point)

若 $f'(c)=0$ 或不存在，則點 c 稱為 f 的臨界點。

註：由圖 3-4 知，極值可能發生在①臨界點②端點(若函數定義在閉區間)。

例題 4.1. 求 $f(x)=x^3-3x+1$的所有臨界點？

解：

課堂練習：求 $f(x)=2x^3-24x$ 的所有臨界點？
解：

例題 4.2. 求 $f(x)=x^{\frac{3}{5}}(4-x)$ 的所有臨界點？
解：

例題 4.3. 求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的所有臨界點？
解：

例題 4.4. 求 $f(x)=xe^{-x}$ 的所有臨界點？
解：

例題 4.5. 求 $f(x)=x\ln x$ 的所有臨界點？
解：

由定理 3.3 知，若函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大及最小值產生。而如何找出它的極值呢？一般來說，我們可依下列四個步驟來完成:
Step 1. 求出 f 在 (a,b) 的臨界點。
Step 2. 計算出各臨界點所對應的函數值。
Step 3. 計算出端點的函數值。
Step 4. 比較 Step 2-3 中的函數值，最小者為最小值，最大者為最大值。

例題 5. 找出 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 在 $[-1,2]$ 中的極值。
解：

課堂練習：求 $f(x)=2x^3-24x+2$ 在 $[0,3]$ 中的極值。
解：

定理 3.6　Rolle's 定理

設函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 連續且在開區間 (a,b) 可微。若 $f(a)=f(b)$，則存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$。

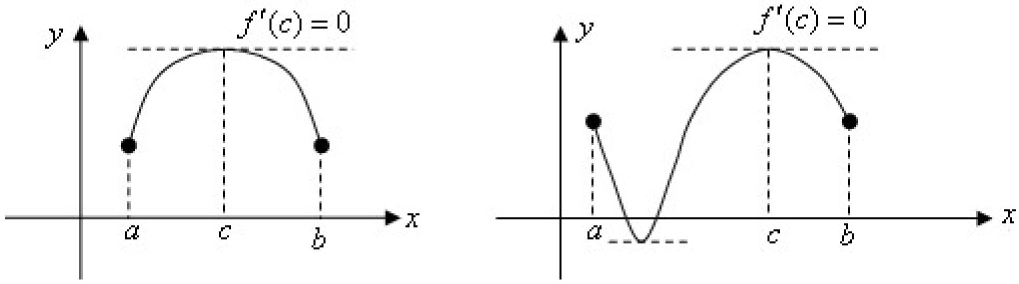

圖 3-5

證：

Case 1. 若 $f(x)=f(a)$ 對所有 $x\in[a,b]$，既 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為常數函數，則 $f'(x)=0$ 對所有 $x\in(a,b)$，因此得證。

Case 2. 若存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)>f(a)$。根據極值定理，存在 $c\in[a,b]$ 使得函數 f 在點 c 為極大值。因為 $f(c)>f(a)$，這表示極大值不是發生在邊界點。因此 f 在開區間 (a,b) 有極大值，由此我們可得到 $f(c)$ 為一個相對極大值。又函數 f 在開區間 (a,b) 可微。如此可得 $f'(c)=0$。

Case 3. 若存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)<f(a)$，證明同 Case 2。

例題 6. 設函數 $f(x)=x^4-2x^2$，試求所有的 $c\in(-2,2)$ 使得 $f'(c)=0$。

解：

課堂練習：設函數 $f(x)=x^2-3x+2$，試求所有的 $c\in(1,2)$ 使得 $f'(c)=0$。

解：

定理 3.7　均值定理 (The Mean Value Theorem)

設函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 連續且在開區間 (a,b) 可微。則存在至少一點 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

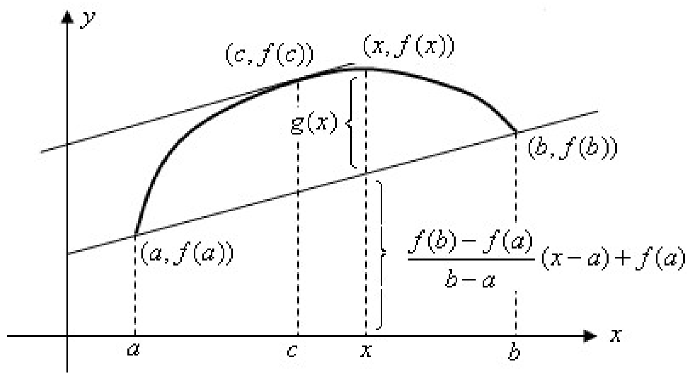

圖 3-6

證： 首先，考慮通過$(a, f(a))$與$(b, f(b))$兩點的割線方程式

$$y=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)+f(a)$$

令

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-y \\ &= f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)+f(a) \end{aligned}$$

因為$g(a)=g(b)=0$且g在閉區間$[a,b]$連續，在開區間(a,b)可微。根據 Rolle's 定理，存在$c\in(a,b)$使得

$$0=g'(c)=f(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

移項即完成此證明。

例題 7. 令函數$f(x)=5-\dfrac{4}{x},\ \ x\in[1,4]$，求出滿足均值定理的$c$值。

解：

課堂練習：令函數$f(x)=x^2+2x-3,\ \ x\in[0,1]$，求出滿足均值定理的$c$值。

解：