第三章 導數的應用

1. 導數的意義
    (1) 切線斜率
    (2) 邊際分析
2. 極值
    (1) 函數的極值與均值定理
    (2) 遞增遞減與一階導數檢定法
    (3) 凹性與二階導數檢定法
    (4) 圖形的描繪
    (5) 商業上的應用
    (6) 應用問題
3. 變化率
4. 微分與微分近似值
5. 羅必達法則

1. 導數的意義

(1) 切線斜率：

當函數 f 之圖形在點 $P(x_0, f(x_0))$ 之切線 T 存在，則切線 T 的斜率 m_T 為

$$m_T = \lim_{Q\to P} m_{\overline{PQ}} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

例題 1. 求通過點 $(0,1)$ 且與曲線 $f(x)=(1+2x)^{10}$ 的切線方程式。

解：

例題 2.求通過點 $(3,3)$ 且與曲線 $x^3+y^3=6xy$ 的切線方程式。

解：

(2) 邊際函數(P. 136)

(a) 總成本函數：

某廠商產品的產出量 x 的總成本函數為 $C(x)$，則 $C(x)$ 在 $x=x_0$ 的邊際成本就是 $C(x)$ 在 $x=x_0$ 多生產一個產品所增加的成本，亦即 $\frac{C(x_0+1)-C(x_0)}{1}$；根據導數的定義可知，$\frac{C(x_0+1)-C(x_0)}{1}\approx C'(x_0)$，故邊際成本大約等於 $C'(x_0)$。邊際成本函數(marginal cost function)定義為

$$MC(x)=C'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}\approx \text{多生產一單位商品之額外成本}$$

例題 3. 設某廠商製造 x 台液晶電視機的每週總成本為

$$C(x)=\frac{x^3}{3000}-\frac{7}{20}x^2+150x+10000\ (\text{以元為單位})。$$

(1) 試求製造第 201 台液晶電視機所需之實際成本為多少?

(2) 當 $x=200$ 時，試求總成本對 x 的變動率？

解：

課堂練習：

設某廠商製造 x 台收音機的每週總成本為

$$C(x)=\frac{1}{5}x^2+3x+20\ (\text{以元為單位})$$

當 $x=10$ 時，試求總成本對 x 的變動率？

(b) 總收益函數：

總收益函數定義為 $R(x)=px$，此處 x 表示某商品銷售的單位數量，p 為單位售價。若價格與銷售數量間的關係(亦即，需求函數，demand function)為 $p=f(x)$，故，

$$R(x)=px=xf(x)$$

同樣的，邊際收益函數(marginal revenue function)定義為

$$MR(x)=R'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{R(x+h)-R(x)}{h}\approx \text{多銷售一單位商品之額外收益}$$

例題 4. 假設手機的單位售價 p 與其需求數量 x 的關係為

$$p=-\frac{2}{\sqrt{x}}+40$$

試求總收益函數 $R(x)$，邊際收益函數 $R'(x)$ 及 $R'(100)$。

解：

課堂練習：某物品單位售價 p 與其需求數量 x 的關係為

$$x=36-\frac{p}{8}$$

試求總收益函數 $R(x)$，邊際收益函數 $R'(x)$。

解：

(c) 總利潤函數：

總利潤函數 $P(x)$ 定義為 $P(x)=R(x)-C(x)$，此處 R 與 C 分別表示總收益函數及總成本函數，而 x 則表示該商品生產及銷售的單位數量。所謂的邊際利潤函數 $P'(x)$ 即是用以測定利潤函數 $P(x)$ 的變化率，以提供我們預測銷售該商品第 $(x+1)$ 單位時的實際利潤或虧損(假設第 x 單位商品已經售出)，故邊際利潤函數(marginal profit function)定義為

$$MP(x)=P'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h}\approx \text{多銷售一單位商品之額外利潤}$$

例題 5. 某公司生產手機吊飾，每個手機吊飾的總成本函數為 $C(x)=0.01x^2+9x+68$ 且其需求函數為 $p(x)=12-0.002x$。試決定邊際利潤，且計算在 $x=100$ 時之邊際利潤。

解：

課堂練習：

某公司生產收音機，每台總成本函數為 $C(x)=500+15x-\frac{1}{5}x^2$，而 $5x=375-3p$。試決定邊際利潤，且計算在 $x=45$ 時之邊際利潤。

解：