

第三章 導數的應用

1. 導數的意義
 - (1) 切線斜率
 - (2) 邊際分析
2. 極值
 - (1) 函數的極值與均值定理
 - (2) 遞增遞減與一階導數檢定法
 - (3) 凹性與二階導數檢定法
 - (4) 圖形的描繪
 - (5) 商業上的應用
 - (6) 應用問題
3. 變化率
4. 微分與微分近似值
5. 羅必達法則

The logo of Southern Taiwan University is a stylized, abstract design. It consists of two large, overlapping, curved shapes. The left shape is blue and the right shape is red. They are connected at the bottom by a white, curved element that forms a central negative space. The overall shape is reminiscent of a stylized 'S' or a pair of interlocking curves.

南台科技大學
Southern Taiwan University

1. 導數的意義

(1) 切線斜率：

當函數 f 之圖形在點 $P(x_0, f(x_0))$ 之切線 T 存在，則切線 T 的斜率 m_T 為

$$m_T = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

例題 1. 求通過點 $(0,1)$ 且與曲線 $f(x) = (1+2x)^{10}$ 的切線方程式。

解：

例題 2. 求通過點 $(3,3)$ 且與曲線 $x^3 + y^3 = 6xy$ 的切線方程式。

解：

(2) 邊際函數(P. 136)

(a) 總成本函數：

某廠商產品的產出量 x 的總成本函數為 $C(x)$ ，則 $C(x)$ 在 $x = x_0$ 的邊際成本就是 $C(x)$ 在 $x = x_0$ 多生產一個產品所增加的成本，亦即 $\frac{C(x_0+1) - C(x_0)}{1}$ ；根據導數的定義可知， $\frac{C(x_0+1) - C(x_0)}{1} \approx C'(x_0)$ ，故邊際成本大約等於 $C'(x_0)$ 。邊際成本函數(marginal cost function)定義為

$$MC(x) = C'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h} \approx \text{多生產一單位商品之額外成本}$$

例題 3. 設某廠商製造 x 台液晶電視機的每週總成本為

$$C(x) = \frac{x^3}{3000} - \frac{7}{20}x^2 + 150x + 10000 \text{ (以元為單位)}。$$

(1) 試求製造第 201 台液晶電視機所需之實際成本為多少？

(2) 當 $x = 200$ 時，試求總成本對 x 的變動率？

解：

南台科技大學
Southern Taiwan University

課堂練習：

設某廠商製造 x 台收音機的每週總成本為

$$C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3x + 20 \text{ (以元為單位)}$$

當 $x = 10$ 時，試求總成本對 x 的變動率？

(b) 總收益函數：

總收益函數定義為 $R(x) = px$ ，此處 x 表示某商品銷售的單位數量， p 為單位售價。若價格與銷售數量間的關係(亦即，需求函數，demand function)為 $p = f(x)$ ，故，

$$R(x) = px = xf(x)$$

同樣的，邊際收益函數(marginal revenue function)定義為

$$MR(x) = R'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h} \approx \text{多銷售一單位商品之額外收益}$$

例題 4. 假設手機的單位售價 p 與其需求數量 x 的關係為

$$p = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 40$$

試求總收益函數 $R(x)$ ，邊際收益函數 $R'(x)$ 及 $R'(100)$ 。

解：

課堂練習：某物品單位售價 p 與其需求數量 x 的關係為

$$x = 36 - \frac{p}{8}$$

試求總收益函數 $R(x)$ ，邊際收益函數 $R'(x)$ 。

解：

(c) 總利潤函數：

總利潤函數 $P(x)$ 定義為 $P(x) = R(x) - C(x)$ ，此處 R 與 C 分別表示總收益函數及總成本函數，而 x 則表示該商品生產及銷售的單位數量。所謂的邊際利潤函數 $P'(x)$ 即是用以測定利潤函數 $P(x)$ 的變化率，以提供我們預測銷售該商品第 $(x+1)$ 單位時的實際利潤或虧損(假設第 x 單位商品已經售出)，故邊際利潤函數(marginal profit function)定義為

$$MP(x) = P'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} \approx \text{多銷售一單位商品之額外利潤}$$

例題 5. 某公司生產手機吊飾，每個手機吊飾的總成本函數為 $C(x) = 0.01x^2 + 9x + 68$ 且其需求函數為 $p(x) = 12 - 0.002x$ 。試決定邊際利潤，且計算在 $x = 100$ 時之邊際利潤。

解：

課堂練習：

某公司生產收音機，每台總成本函數為 $C(x) = 500 + 15x - \frac{1}{5}x^2$ ，而 $5x = 375 - 3p$ 。試決定邊際利潤，且計算在 $x = 45$ 時之邊際利潤。

解：