

2-6 高階導函數

若函數 $y = f(x)$ 具有 n 階的導函數，則依次的導函數記為：

$$\text{一階導函數： } y' = \frac{dy}{dx} = D_x f(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\text{二階導函數： } y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x^2 f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x)$$

$$\text{三階導函數： } y''' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3} = D_x^3 f(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x) = f'''(x)$$

$$\text{四階導函數： } y^{(4)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) = \frac{d^4 y}{dx^4} = D_x^4 f(x) = \frac{d^4}{dx^4} f(x) = f^{(4)}(x)$$

$$n \text{ 階導函數： } y^{(n)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n} = D_x^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x)$$

例題 1. 若函數 $f(x) = x^5$ ，求 $f^{(6)}(x)$ 。

練習：若函數 $f(x) = 5x^6$ ，求 $f^{(6)}(x)$ 。

例題 2. 若 $f(x) = x^{100} + x^{50} + 50$ ，求 $f^{(50)}(x)$ 。

練習：若 $f(x) = 50x^{45} + 100$ ，求 $f^{(30)}(x)$ 。

例題 3. 若 $f(2) = -3, f'(2) = 2$ 且 $f''(2) = 4$ ，試求 $\left. \frac{d^2}{dx^2} f^2(x) \right|_{x=2}$ 。

例題 4. 設 $y = \frac{1}{2x+1}$ ，試求 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 。

練習：設 $y = \frac{1}{3x-2}$ ，試求 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 。

例題 5. 設 $x^2 - 2xy + y^2 = 1$ ，試求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

南台科技大學
Southern Taiwan University