2-5 指數與對數函數的導函數

1. 對數函數的導函數

定理：$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

例題 1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n$

練習：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}$

例題 2. 求 $\lim\limits_{y\to 0}(1+2y)^{1/y}$

練習：求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}$

例題 3. 回顧 0-5 節的連續複利中提到，若本金 P 元，年利率為 r，每年複利 n 次，則 t 年後的本利和 S 為 $S=P(1+\frac{r}{n})^{nt}$。若以連續複利計算(既 $n\to\infty$)則 t 年後的本利和為 $S=Pe^{rt}$，試證之。

定理：若 $u(x)>0$ 為可微分函數，則

(1) $\frac{d}{dx}[\ln x]=\frac{1}{x},\quad x>0$

(2) $\frac{d}{dx}[\ln u(x)]=\frac{1}{u(x)}u'(x)$

證：(1)

$$\frac{d}{dx}[\ln x]=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{h}{x}}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

(2) 根據連鎖律及公式(1)，我們可以獲得 $\frac{d}{dx}[\ln u(x)]=\frac{1}{u(x)}u'(x)$

例題 4. 求函數 $f(x)=x^4\ln 2x$ 的導函數。

練習：求函數 $f(x)=2x\ln 6x$ 的導函數。

例題 5. 求函數 $f(x)=\ln^3(x^2+7)$ 的導函數。

練習：求函數 $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+7)}$ 的導函數。

例題 6. 試求函數 $f(x)=\ln\left(\frac{9x+6}{6x-1}\right)$ 之圖形在點 $x=1$ 的切線斜率及方程式。

練習：試求 $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 在 $x=2$ 的切線方程式。

定理：若 $u(x)$ 為可微分函數且 $u\neq 0$，則

$$\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{1}{u}\cdot u'$$

證： 若 $u>0$，則由定理得證 $\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\cdot u'$

若 $u<0$，則 $\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{d}{dx}\ln(-u)=\frac{1}{-u}(-u)'=\frac{1}{-u}(-u')=\frac{1}{u}\cdot u'$

例題 7. 試求函數 $f(x)=\ln|x^3-x|$ 的導函數。

練習：試求函數 $f(x)=\ln|x^2-1|$ 的導函數。

定理：若 $a>0,\ a\neq 1$ 且 $u(x)$ 為可微分函數，則

(1) $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a},\quad x>0$

(2) $\frac{d}{dx}\log_a|u|=\frac{1}{u\ln a}\cdot u',\quad u\neq 0$

證： (1) 根據對數的換底公式 $\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}$ ，因此 $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x\ln a}$

(2) 根據對數的換底公式及定理，我們可以獲得

$$\frac{d}{dx}\log_a|u|=\frac{d}{dx}\frac{\ln|u|}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$$

例題 8. 求 $\frac{d}{dx}\log_2(x^2+1)$

練習：$\frac{d}{dx}\log_3(5x+1)$

例題 9. 試求函數 $f(x)=\log_5\left|\frac{5x+4}{2x-1}\right|$ 的導函數。

練習：$\frac{d}{dx}\log_3|5x+1|$

定理：若 r 為實數，則

$$\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$$

證：令 $y=x^r$，則 $\ln|y|=r\ln|x|$，等號兩邊對 x 微分可得 $\frac{1}{y}y'=\frac{r}{x}$，或 $y'=\frac{r}{x}y=\frac{r}{x}x^r=rx^{r-1}$

例題 10. 求 $\frac{d}{dx}(x^\pi+x^e)$

練習：$\frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}}$

2. 指數函數的導函數

定理：若 $u(x)$ 為可微分函數，則

(1) $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

(2) $\frac{d}{dx}e^{u(x)}=e^{u(x)}u'(x)$

證： (1) 令 $y=e^x$，則 $\ln y=x$，對 x 微分可得 $\frac{d}{dx}\ln y=\frac{d}{dx}x$。因此，$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1$。故，$\frac{dy}{dx}=y=e^x$

(2) 根據連鎖律及式(1)我們可以獲得 $\frac{d}{dx}e^{u(x)} = e^{u(x)}u'(x)$

例題 1. 若函數 $g(x) = e^{-x^2+6x-9}$ ，求 $g'(2)$

練習：若函數 $g(x) = e^{x^3}$ ，求 $g'(1)$

例題 2. 求函數 $f(x) = \frac{e^x}{x^2+3}$ 的導函數。

練習：求函數 $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ 的導函數？

定理：若 $a > 0$ 且 $u(x)$ 為可微分函數，則

(1) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

(2) $\frac{d}{dx}a^{u(x)} = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$

證： (1) 因為 $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ ，所以 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = a^x \ln a$

(2) 根據連鎖律及(1)我們可得 $\frac{d}{dx}a^{u(x)} = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$

例題 3. 試求函數 $f(x) = 3^{x^2+x+1}$ 的導函數。

練習：試求函數 $f(x) = 2^{3x+1}$ 的導函數。

例題 4. 若 $y = x^x$ 求 y' 。

練習：若 $y = (2x)^x$ 求 y' 。