2-4 反函數與隱函數的導函數

1. 反函數的導函數

定理：令函數 f 可微且存在反函數 g，若 $f'(x)\neq 0$，則反函數 g 可微且

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

證： 由反函數定義知 $g(f(x))=x$，利用連鎖律對等式兩邊微分，則

$$g'(f(x))\,f'(x)=1$$

因為 $f'(x)\neq 0$，所以

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

註： 若設 $y=f(x)$，則 $x=f^{-1}(y)=g(y)$。因此

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad 或 \quad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

例題 1. 若 $f(x)=\frac{1}{4}x^3+x-1$，求（1）$f^{-1}(3)$（2）$(f^{-1})'(3)$

練習：若 $f(x)=x^3$，求（1）$f^{-1}(2)$（2）$(f^{-1})'(8)$

例題 2. 若 $y=x^3+2x+7$，求 $\frac{dx}{dy}$

練習：若 $y=2x^2+3x-2$，求 $\frac{dx}{dy}$

2. 參數式的導函數

定理：若曲線參數式 $x=x(t),\ \ y=y(t)$，對 t 均可微且 $\frac{dx}{dt}\neq 0$，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

證：由連鎖律及反函數的公式知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}\ 。$$

例題 3.若曲線參數式為 $x=t^2+t^3,\ \ y=\frac{1}{t+1}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ 及在點 $(2,\frac{1}{2})$ 的切線方程式。

練習：求曲線 $x=t^2,\ \ y=3t$ 在 $t=2$ 處的切線方程式。

3. 隱函數的導函數

若考慮 x 為自變數，y 為因變數，則前面章節所討論之函數 $y=f(x)$ 皆稱為顯函數(Explicit Function)。例如

$$y=x^2+x+1,\quad y=\frac{3x^2+2}{x-5},\quad y=\sqrt{x^3-6x+3}$$

但若方程式 $F(x,y)=0$，其中 y 無法明顯表示為 x 的函數，稱 y 為 x 的隱函數(Implicit Function)。例如

$$x^2+y^2=1,\quad x^2y^3-x^3+y^2+1=0,\quad x\sqrt{1+y^2}=3$$

對上述的方程式，如何求導函數 $\dfrac{dy}{dx}$?

隱函數微分法：

Step1：把 y 視為 x 的函數，利用連鎖律在方程式的兩邊對 x 微分。

Step2：把含有 $\dfrac{dy}{dx}$ 項的移到左手邊且把其它項移到右手邊。

Step3：把方程式左邊的因式 $\dfrac{dy}{dx}$ 移出。

Step4：方程式同除以左邊不包含 $\dfrac{dy}{dx}$ 之因式以解出 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

例題 4. 若 $x^2y^3+y^2-5y-x^2=-4$，試求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{dx}{dy}$

練習：若 $x^2+y^2=1$，試求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{dx}{dy}$

例題 5. 試求方程式 $x^2\left(x^2+y^2\right)=y^2$ 之圖形在點 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的切線方程式。

練習：試求方程式 $x^2+y^2=xy^2+1$ 之圖形在點 $(0,1)$ 的切線方程式。