

## 2-4 反函數與隱函數的導函數

### 1. 反函數的導函數

定理：令函數  $f$  可微且存在反函數  $g$ ，若  $f'(x) \neq 0$ ，則反函數  $g$  可微且

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

證：由反函數定義知  $g(f(x)) = x$ ，利用連鎖律對等式兩邊微分，則

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

因為  $f'(x) \neq 0$ ，所以

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

註：若設  $y = f(x)$ ，則  $x = f^{-1}(y) = g(y)$ 。因此

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{或} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

例題 1. 若  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$ ，求 (1)  $f^{-1}(3)$  (2)  $(f^{-1})'(3)$

練習：若  $f(x) = x^3$ ，求 (1)  $f^{-1}(2)$  (2)  $(f^{-1})'(8)$

例題 2. 若  $y = x^3 + 2x + 7$ ，求  $\frac{dx}{dy}$

練習：若  $y = 2x^2 + 3x - 2$ ，求  $\frac{dx}{dy}$

### 2. 參數式的導函數

定理：若曲線參數式  $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ ，對  $t$  均可微且  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ，則

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

證：由連鎖律及反函數的公式知

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$

例題 3. 若曲線參數式為  $x = t^2 + t^3$ ， $y = \frac{1}{t+1}$ ，求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}$  及在點  $(2, \frac{1}{2})$  的切線方程式。

練習：求曲線  $x = t^2$ ， $y = 3t$  在  $t = 2$  處的切線方程式。

### 3. 隱函數的導函數

若考慮  $x$  為自變數， $y$  為因變數，則前面章節所討論之函數  $y = f(x)$  皆稱為顯函數(Explicit Function)。例如

$$y = x^2 + x + 1, \quad y = \frac{3x^2 + 2}{x - 5}, \quad y = \sqrt{x^3 - 6x + 3}$$

但若方程式  $F(x, y) = 0$ ，其中  $y$  無法明顯表示為  $x$  的函數，稱  $y$  為  $x$  的隱函數(Implicit Function)。例如

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 y^3 - x^3 + y^2 + 1 = 0, \quad x\sqrt{1 + y^2} = 3$$

對上述的方程式，如何求導函數  $\frac{dy}{dx}$ ？

隱函數微分法：

Step1：把  $y$  視為  $x$  的函數，利用連鎖律在方程式的兩邊對  $x$  微分。

Step2：把含有  $\frac{dy}{dx}$  項的移到左手邊且把其它項移到右手邊。

Step3：把方程式左邊的因式  $\frac{dy}{dx}$  移出。

Step4：方程式同除以左邊不包含  $\frac{dy}{dx}$  之因式以解出  $\frac{dy}{dx}$ 。

例題 4. 若  $x^2 y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ ，試求  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{dx}{dy}$

練習：若  $x^2 + y^2 = 1$ ，試求  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{dx}{dy}$

例題 5. 試求方程式  $x^2(x^2 + y^2) = y^2$  之圖形在點  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  的切線方程式。

練習：試求方程式  $x^2 + y^2 = xy^2 + 1$  之圖形在點  $(0, 1)$  的切線方程式。

南台科技大學  
Southern Taiwan University