2-2 基本的微分運算

定理：若 f 為常數函數，則 $f'(x)=0$

證： 令 $f(x)=c$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$，我們有 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{c-c}{h}=0$

例題 1. 若 $f(x)=\pi$ ，求 $f'(x)$

練習：若 $f(x)=\sqrt{30}$，求 $f'(x)$

定理：若 n 為正整數，則函數 $f(x)=x^n$ 可微且 $f'(x)=nx^{n-1}$

證：

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{[(x+h)-x][(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}\\
&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n}\\
&=nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

例題 2. 若 $f(x)=x^3$ ，求 $f'(x)$

例題 3. 若 $f(x)=x$ ，求 $f'(x)$

練習：若 $f(x)=x^4$ ，求 $f'(x)$

註：若 n 為實數，則函數 $f(x)=x^n$ 可微且 $f'(x)=nx^{n-1}$

例題 4：若 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ，求 $f'(x)$

例題 5：若 $f(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}}$ ，求 $f'(x)$

練習：若 $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ ，求 $f'(x)$

練習：若 $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ ，求 $f'(x)$

定理：若 c 為一常數，且 f 為一可微函數，則 cf 也為可微函數且 $[cf(x)]'=cf'(x)$

證： $[cf(x)]'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$

例題 6. 若 $f(x)=9x^5$ ，求 $f'(x)$

練習：若 $f(x)=\sqrt{2}x^{70}$，求 $f'(x)$

定理：若 f 與 g 皆為可微函數，則 $f\pm g$ 也為可微函數且 $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

證：

$$
\begin{aligned}
[f(x)+g(x)]'&=\lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\
&=f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

例題 7. 若 $f(x)=x^3+4x$ ，求 $f'(x)$

練習：若 $f(x)=2x^4+x-1$，求 $f'(x)$

例題 8. 若 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-2x^2+2x$，求 $f'(2)$

定理：若 f 與 g 皆為可微函數，則 fg 也為可微函數，且 $[f(x)g(x)]'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

證：

$$
\begin{aligned}
&[f(x)g(x)]' \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&=\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)\right] \\
&=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)
\end{aligned}
$$

例題 9. 若 $f(x)=(x^2+1)(3x+1)$，求 $f'(1)$

練習：若 $f(x)=(x^3-1)(4x-1)$，求 $f'(1)$

推論：若 f，g，h 皆為可微函數，則 $(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$

例題 10. 若 $f(x)=(x^3+3x)(3x^2+1)(x^5+2x)$，求 $f'(x)$

定理：若 f 與 g 皆為可微函數且 $g(x)\neq 0$，則 $\dfrac{f}{g}$ 也為可微函數，且

$$
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{g^2(x)}
$$

證：

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]-f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)g(x+h)} \\
&=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
$$

例題 11. 若 $g(x)=\dfrac{6x^2+1}{2x}$，求 $g'(x)$

練習：若 $g(x)=\dfrac{2x}{6x^2+1}$，求 $g'(1)$

推論：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$，$g(x)\neq 0$

例題 12. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$，求 $f'(1)$

練習：若 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求 $f'(1)$