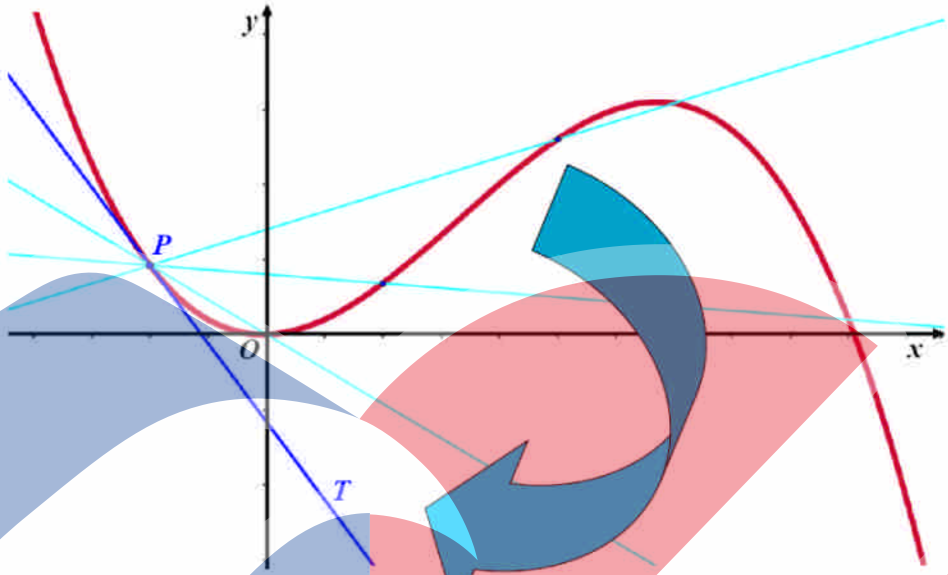
2-1 導數的定義

設 $I=(a,b)$ 為一開區間，f 為定義在 I 上的實數值函數，若 $P(x_0, f(x_0))$ 與 $Q(x, f(x))$ 為函數 f 之圖形上的相異兩點，則連接 P 與 Q 兩點之割線斜率為 $m_{\overline{PQ}}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



若令 x 逼近 x_0，則 Q 點會沿著 f 的圖形逼近 P 點，在此同時通過 P 與 Q 兩點的割線，也相同會逼近切線 T，於是我們知道當函數 f 之圖形在點 $P(x_0, f(x_0))$ 之切線 T 存在，則當 x 逼近 x_0 時，割線斜率 $m_{\overline{PQ}}$ 將逼近切線 T 的斜率 m_T，所以我們可得

$$m_T=\lim_{Q\to P} m_{\overline{PQ}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定義：導數(Derivative)

(1) 設 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 為一函數且 $x_0\in(a,b)$，若極限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，則稱此極值為函數 $f(x)$ 在 x_0 點的導數且記為 $f'(x_0)$，即 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

另一方面，若令 $x=h+x_0$，則上式又可改寫為

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(2) 若函數 f 在 x_0 點的導數存在，則我們稱函數 f 在 x_0 點可微(Differentiable)。反之，則函數 f 在 x_0 點不可微。

(3) 若函數 f 在開區間 (a,b) 上的每一點都可微，則我們稱函數 f 為可微函數且記為 $f'(x)$，既對 $x\in(a,b)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

註 1：一般函數 $f(x)$ 在點 x_0 的導數符號，可用下列任一種符號表示

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=D_x f(x)\big|_{x=x_0}=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

註 2：若函數 $y=f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 點的切線斜率 $m_T=f'(x_0)$ 存在，則利用直線之點斜式知切線方程式為

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

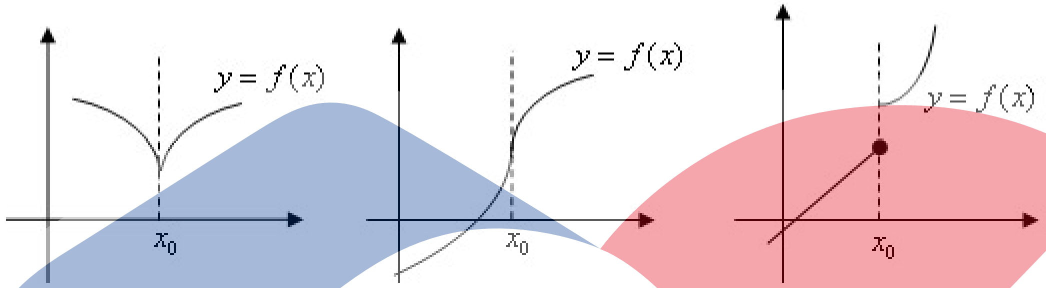
例題 1.設 $f(x)=x^2$，求(a) $f'(1)$ (b) $f'(x)$

練習：設 $f(x)=3x^2+1$，求(a) $f'(2)$ (b) $f'(x)$

例題 2.若函數 $f(x)=|x|$，討論 $f'(0)$ 是否存在。

練習：若函數 $f(x)=|x-1|$，求 $f'(0)$，$f'(2)$ 及 $f'(1)$。

我們可注意到函數 $f(x)$ 在點 $x=x_0$ 若不可微分則極限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，一般我們所遇到的不可微分之點有三類(1)尖點(含折角) (2)具有垂直切線的點 (3)不連續點。



(1) (2) (3)

例題 3. 試證 $f(x)=x^{1/3}$ 在點 $x=0$ 不可微分。

定理：若函數 $f(x)$ 在 c 點可微分，則 $f(x)$ 在 c 點連續。

證： 我們只需證明 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$ 或 $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-f(c)]=0$ 即可，因為

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]\\&=\lim_{x\to c}\left[(x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right]\\&=\lim_{x\to c}(x-c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\\&=0\cdot f'(c)=0\end{aligned}$$

故得證 $f(x)$ 在 c 點連續。

註：定理的等價命題知：若 $f(x)$ 在 c 點不連續，則 $f(x)$ 在 c 點不可微。

例題 4. 設函數 f 定義如下：

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4, & x<1\\ x+2, & x\ge 1\end{cases}$$

試證 $f(x)$ 在點 $x=1$ 不可微分。

練習：若 $f(x)=\begin{cases}-x+4, & x<2\\ x+1, & x\ge 2\end{cases}$，試證 $f(x)$ 在點 $x=2$ 不可微分。

例題 5. 求 $f(x)=x^2$ 在 $(2,4)$ 點的切線方程式？

練習：求 $f(x)=2x^2-3$ 在 $(2,5)$ 點的切線方程式？