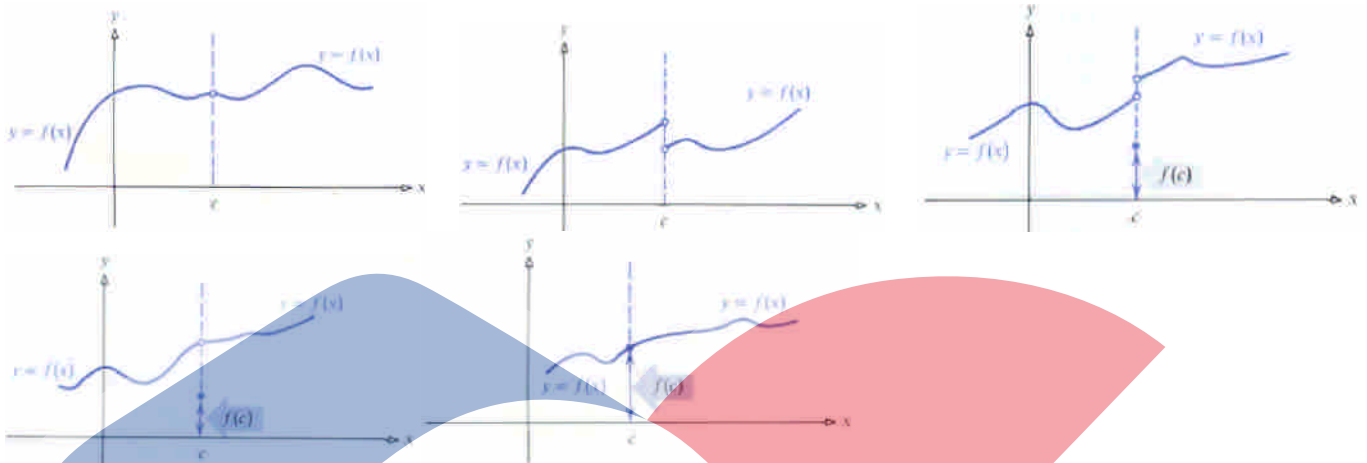


1-5 連續函數 (continuous functions)

定義：設 $f(x)$ 在 $x=a$ 的附近有定義且包括 a 。則

$$f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 連續} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

而所謂連續函數，即是在其定義域內每一點均連續的函數。



例題 1：說明函數 $f(x) = 3x^3 - 5x + 4$ 在 $x=1$ 處為連續。

例題 2：討論函數 $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$ 在何點為連續。

定理：

- (1) 多項式函數在每一點都是連續的。
- (2) 有理函數 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 除了在分母 $Q(x) = 0$ 的 x 之外都連續。
- (3) 指數函數、對數函數，在它們的定義域均連續。
- (4) 給定兩個連續函數 f 和 g 之後，把它們相加、相減、相乘、相除之後，所得到的新函數

$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g} (g \neq 0)$ 也都是連續函數。

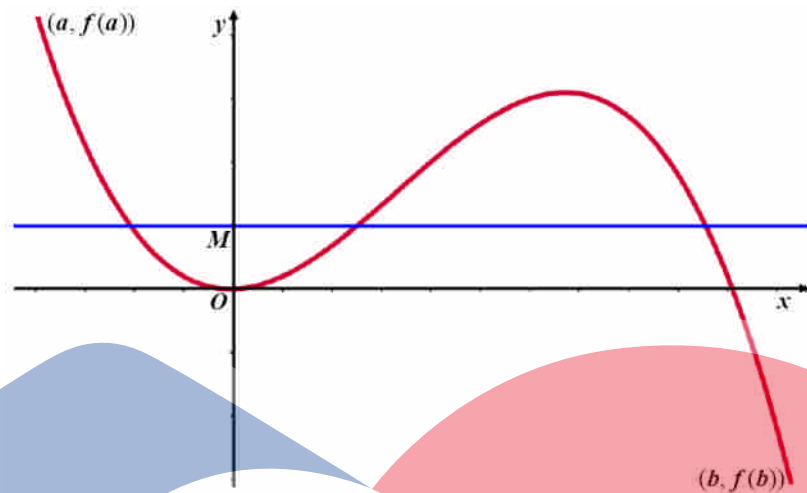
例題 3：設 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ ，請問 $f(x)$ 是否是連續函數？

例題 4：設 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}, & x > 3 \\ mx + 1, & x \leq 3 \end{cases}$ ，求 m 的值使得 f 為一連續函數。

課堂練習：設 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ mx + 1, & x \leq 1 \end{cases}$ ，求 m 的值使得 f 為一連續函數。

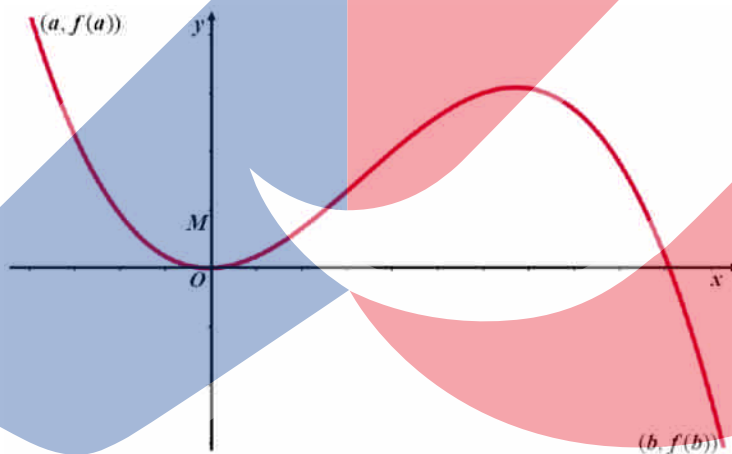
定理 1.10 中間值定理 (The intermediate value theorem)

假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續的，且 M 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間的任一數，則在 $[a, b]$ 中至少存在一數 c ，使得 $f(c) = M$ 。



定理 1.11 勘根定理 (Locating root theorem, Bolzano's theorem)

假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是連續的，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 異號，即 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 。則至少有一個 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$ 。即方程式 $f(x) = 0$ 至少有一個根在 (a, b) 。



例題 5：求證 $x^3 + x - 1 = 0$ 至少有一實根。

課堂練習：求證 $3x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$ 至少有一實根。

南方科技大學
Southern Taiwan University