

## 1-4 無窮極限 (infinite limits) 及在無窮遠處的極限 (limits at infinity)

例題 1. 假設  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  求

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$							

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$x$	1	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$						

(3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$x$	-1	-10	-100	-1000	-10000	-100000
$f(x)$						

定義：

1. 假設  $f(x)$  在  $x=a$  的附近有定義，可能除了  $a$  之外，則符號  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  或  $f(x) \rightarrow \infty$  當  $x \rightarrow a$ ，意指當  $x \rightarrow a$  時，其對應的函數值越來越大，沒有上界，或者說我們可以讓  $f(x)$  任意的大，想要多大，就可多大，只要  $x$  取的夠接近  $a$ ，但不是等於  $a$ 。
2. 同理可以定義  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  或  $f(x) \rightarrow -\infty$  當  $x \rightarrow a$ ，意指可以讓  $f(x)$  負的任意大，沒有下界，只要  $x$  取的夠接近  $a$ 。

例題 2. 設  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ ，試討論

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

練習：求下列各極限值：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x^2 - 2x + 1|$

定義：

1. 符號  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  或  $f(x) \rightarrow L$  當  $x \rightarrow \infty$ ，意指我們可以讓  $f(x)$  任意的趨近於  $L$ ，只要  $x$  取得正的夠大。
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$  或  $f(x) \rightarrow M$  當  $x \rightarrow -\infty$  意指可以讓  $f(x)$  任意的接近  $M$ ，只要  $x$  取得負的夠大。

例題 3. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 2}{2x^3 + 3}$

例題 4. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x}{3x^3 - 2x + 9}$

例題 5. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 10x^3 + 5}{2x^3 + 10x - 3}$

例題 6：求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

定理：

$$\text{設 } R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty & , n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & , n = m \\ 0 & , n < m \end{cases}$$

練習：求(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 10^{100}}{x^{2.01} + 1}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x + 3x^2}{1 + x^2}$

例題 7：  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 9} - x)$

練習：  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x})$

當  $f(x)$  有無窮極限或在無窮遠處有極限時，在函數圖形的表現上， $f(x)$  有所謂的漸近線 (asymptotes)。

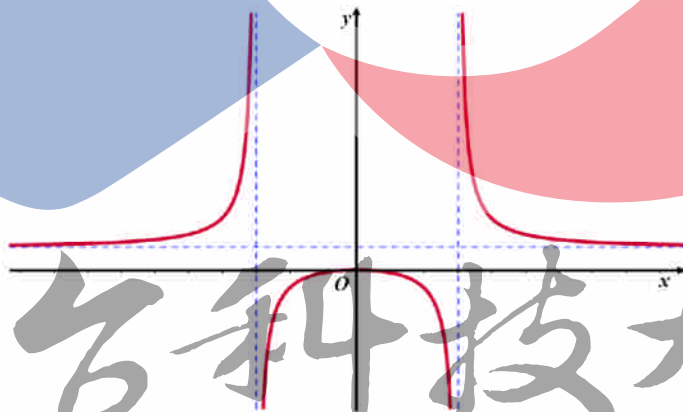
定義 1.7：

(1) 我們說  $x = a$  是  $y = f(x)$  的垂直漸近線 (vertical asymptote)。如果下列敘述至少有一個成立

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

(2)  $y = b$  是  $y = f(x)$  的水平漸近線 (horizontal asymptote)。如果下列敘述至少有一個成立

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$



例題 8. 求  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  的漸近線。

課堂練習：求  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$  的水平漸近線及垂直漸近線。

例題 9. 某一公司製造印表機，預估製造  $x$  台印表機之總成本為每年  $C(x) = 100x + 200000$  元，已知每台印表機之平均成本為  $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ ，試計算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{C}(x)$  並說明其結果。