

1-3 極限的基本性質

定理：設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均存在，則

(1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ ， c 是常數

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\lim_{x \rightarrow -10} \pi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} x = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\lim_{x \rightarrow e} x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} 5x = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\lim_{x \rightarrow e} (-3x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} x e^x = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$)

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$ ， $n \in \mathbb{N}$

例題： $\lim_{x \rightarrow 3} (x+2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

例題 1：求 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 1)$

例題 2：求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 4}{2x - 1}$

極限求法的步驟：

1. 求 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (亦即，求 $f(a)$)
2. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不是不定型，則直接求解；否則，依下列各不定型求解。

註：不定型有 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $0 \times \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0

3. 各種不定型的求法：

(1) $\frac{0}{0}$ ：(a) 因式分解、(b) 有理化、(c) 羅必達法則

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ ：(a) 將分母與分子同時除以分母中絕對值最大數、(b) 羅必達法則

(3) $0 \times \infty$ ：(a) 化成 $\frac{0}{0}$ 、(b) 化成 $\frac{\infty}{\infty}$

(4) $\infty - \infty$ ：(a) 通分合併、(b) 有理化

(5) 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0 ：利用指數與對數性質化簡

例題 3：求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

練習：求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

例題 4：求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}}{x-3}$

練習：求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3} \right)$

例題 5：求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

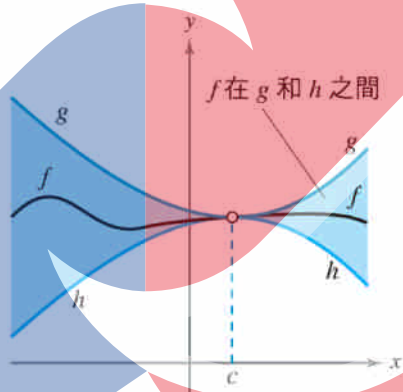
練習：求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x}$

定理 1.5 夾擠定理 (The squeeze theorem)

任給三個函數 $f(x), g(x), h(x)$ ，如果在 $x=a$ 的附近 (可以不包含 a)，我們有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ 。

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$



例題 6：求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x)$ ，其中 $-1 \leq f(x) \leq 1$ ，對所有 $x \neq 0$ 。

練習：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot f(x)$ ，其中 $|f(x)| \leq M, M > 0$ ，對所有 $x > 0$ 。

南台科技大學
Southern Taiwan University