

1-2 單邊極限 (one-sided limits)

定義：

(1) 若 $x \rightarrow a^+$ 時 $f(x) \rightarrow R$ ，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的右極限是 R 。記為

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = R$$

(2) 若 $x \rightarrow a^-$ 時 $f(x) \rightarrow L$ ，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左極限是 L ，記為

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

例題 1：若 $f(x) = \begin{cases} 3-2x & ;x < 1 \\ 5x+1 & ;x \geq 1 \end{cases}$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

練習：設 $f(x) = \begin{cases} x+1 & ;x < 2 \\ 2x-1 & ;x > 2 \end{cases}$ 求

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

例題 2：若 $f(x) = [x]$ ，其中 $[\cdot]$ 表高斯函數，求

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

練習：若 $f(x) = [x+3]$ ，其中 $[\cdot]$ 表高斯函數，求

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

定理：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

註：

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 不存在}$$

例題 3. 若 $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x < -1 \\ 1+\sqrt{x+1}, & x \geq -1 \end{cases}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

例題 4. 設 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ x+1, & x > 3 \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

課堂練習：若 $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x < 1 \\ 2+\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

例題 5. 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

課堂練習：求 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|5-x|}{x-5}$