1-1 極限定義

極限（limit）的概念是微積分的基礎。

假設有一輛火車沿著一直線運動，它和原點的距離以 s 表示，假設距離 s 和時間 t 的關係為 $s=f(t)=4t^2, t\geq 0$。問這輛火車在時間 $t=2$ 的瞬時速度（instantaneous velocity）為何？

在任意時間 t 和 $t=2$ 之間的平均速度由下式給出：

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{4t^2-16}{t-2}=\frac{4(t^2-4)}{t-2}=g(t)$$

求該火車在時間 $t=2$ 的瞬時速度，直覺上的想法就是用這個平均速度 $g(t)$ 來逼近瞬時速度。當我們讓 t 任意的接近 2 時，如果 $g(t)$ 會任意的接近一個固定的數 L，則我們說 L 就是這輛火車在時間 $t=2$ 這一瞬間的速度，而這個 L 就是 $g(t)$ 在 t 趨近於 2 時的極限（limit），用符號

$$\lim_{t\to 2} g(t)=\lim_{t\to 2}\frac{4(t^2-4)}{t-2}=L$$

來表示。

註：不能直接把 $t=2$ 代入 $g(t)$，因 $g(2)$ 根本沒有定義。我們所考慮的只是 t 很接近 2 或者說 t 在 2 點的附近 $g(t)$ 的性質。我們在這裡所講的很接近、附近、逼近及趨近於都是直觀上的意義，讀者可以直接由文字意義理解。

下面的表列出一些時間區間的平均速度，即一些 $g(t)$ 在 $t\neq 2$ 的函數值：

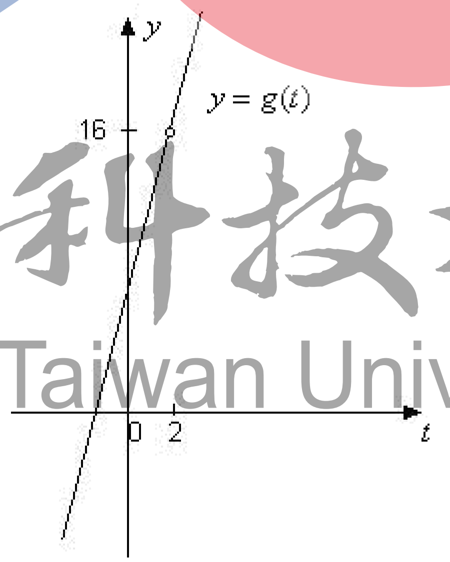
t	1.5	1.99	1.9999	$\to 2 \leftarrow$	2.0001	2.001	2.1
$g(t)$				$\to ? \leftarrow$			

當 t 很接近 2 時，其對應的函數值 $g(t)$ 會很接近 16。

上面這個事實，我們說在 t 趨近於 2 時，$g(t)$ 的極限值為 16，或是簡單講說 $g(t)$ 在 $t=2$ 的極限值為 16，用下列符號表示：

$$\lim_{t\to 2} g(t)=\lim_{t\to 2}\frac{4(t^2-4)}{t-2}=16 \quad \text{或} \quad g(t)\to 16 \text{ 當 } t\to 2$$

亦可從下面 $g(t)$ 的函數圖形來理解：

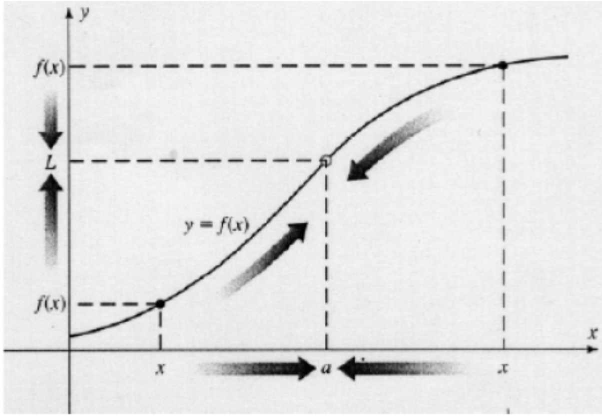


南台科技大學
Southern Taiwan University

下面我們給出極限（limit）直覺上的定義：

定義：若當 x 趨近於 a 時且 $x\neq a$，$f(x)$ 會趨近於一固定值 L，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限值為 L，以下列符號表示：

$$\text{“}\lim_{x\to a} f(x)=L\text{”} \quad \text{或} \quad \text{“}f(x)\to L \text{ 當 } x\to a\text{”}$$



若 L 不存在，我們說 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限不存在。

例題：

(1) 若 $f(x)=x+2$，則 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

(2) 若 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，則 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

(3) 若 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ;x\neq 2 \\ 1 & ;x=2 \end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

註：由上面的定義可知，$f(x)$ 在 $x=a$ 的極限值，和 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值是沒有關係的。

例題 1：求 $\lim\limits_{x\to 2} x^3=$

練習 1：求 $\lim\limits_{x\to 4}(x^3+x-5)=$

練習 2:：求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1}{x-2}=$

例題 2：設 $f(x)=\begin{cases} x-1, x<3 \\ 2 \quad ,x=3 \\ x+1, x>3 \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$

練習：設 $f(x)=\begin{cases} x+1 & ;x<2 \\ 2x-1 & ;x>2 \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

南台科技大學
Southern Taiwan University