

(4) 合成函數(Composition Functions)

任給兩個函數 f 和 g ，則 g 和 f 的合成函數 (composition function) 以符號 $f \circ g$ 表示，其定義為

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

例題 13：若 $f(x) = x^2 - 1$ ， $g(x) = \sqrt{x} + 1$ ，求

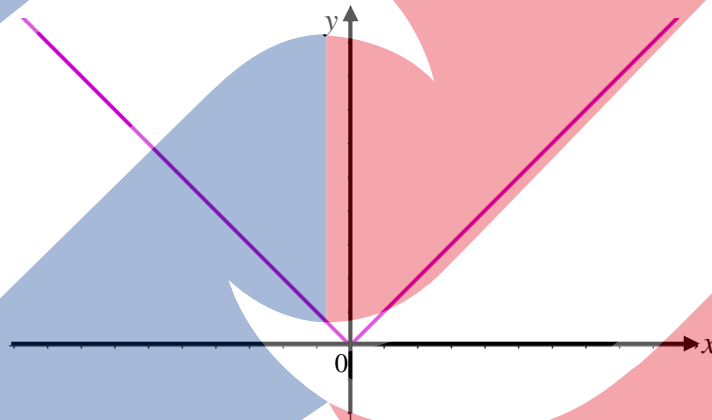
- (1) $(f \circ g)(x)$ 及其定義域
- (2) $(g \circ f)(x)$ 及其定義域

(5) 特殊函數

(a) 絕對值函數(Absolute Functions)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

稱為絕對值函數(absolute value function)，其定義域為 \mathbb{R} 。

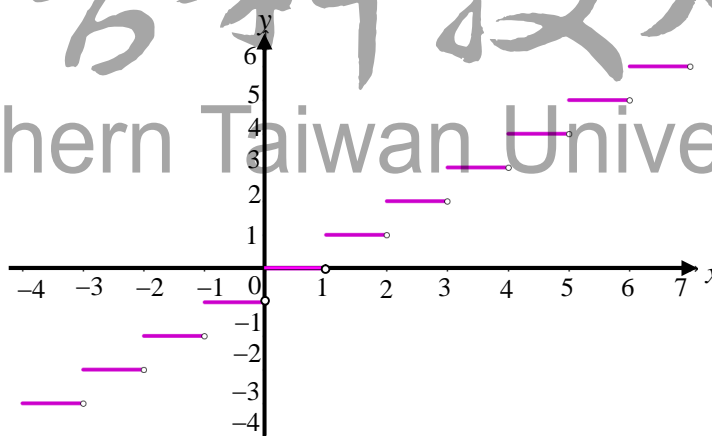


(b) 高斯函數(Gauss Functions)或最大整數函數(Greatest Integer Functions)

對於任意實數 x ，我們以 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

例如： $[2.3] = 2$ ， $[-\pi] = -4$ ， $[5] = 5$ 等。

函數 $f(x) = [x]$ 稱為高斯函數(Gauss function)或最大整數函數(greatest integer function)，其定義域為 \mathbb{R} 。



(c) 分段函數(piecewise function)

例題 14：設函數 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$ ，求 $f(x)$ 在 $x=-3$ 的函數值並劃出 $f(x)$ 的函數圖形。

(6) 反函數

考慮有下列映射 (mapping) 關係的兩個函數 f 和 g ：



由上圖可知 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 1$ ， $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(3) = 4$ 。事實上對所有 x 屬於 f 的定義域，我們均有 $(g \circ f)(x) = x$ ；而且對所有 y 屬於 g 的定義域，我們都有 $(f \circ g)(y) = y$ 。這時我們說 f 是 g 的反函數 (inverse function)，且 g 是 f 的反函數。顯然地，並不是任給一函數，它都會有反函數，至少應該滿足下列的特性。

定義： f 是 1-1 函數 (one by one function)，如果 $x_1 \neq x_2$ ，則 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。或者，若 $f(x_1) = f(x_2)$ 則 $x_1 = x_2$ 。

例題 15：設 $f(x) = x^2$ ，則 f 不是 1-1 函數。因 $1 \neq -1$ 但 $f(1) = f(-1) = 1$ 。但我們若只考慮 $f(x) = x^2$ 是定義在開區間 $(0, \infty)$ ，則它是 1-1 的，因為若 $x_1 \neq x_2$ 且 $x_1 > 0$ ， $x_2 > 0$ 則 $x_1^2 \neq x_2^2$ ，所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

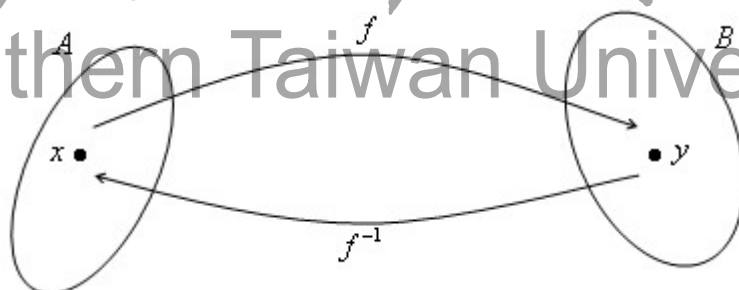
由這例子可看出同樣一個函數是否為 1-1，和當時所考慮的定義域有關。一般情況下任給一個函數時，如果沒有特別明講，其定義域是所有有定義的實數。

定義：設 f 是 1-1 函數，其定義域為 A ，值域為 B ，則其反函數存在，以 f^{-1} 表示， f^{-1} 是以 B 為定義域， A 為值域的函數且滿足

$$f^{-1}(y) = x \text{ 對 } y \in B \Leftrightarrow f(x) = y \text{ 對 } x \in A$$

習慣上，我們自變數用 x ，所以當我們的焦點放在 f^{-1} 時，則 $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ 。由上面的定義可知，兩個函數 f 和 g 互為反函數，亦可由下列式子來定義：

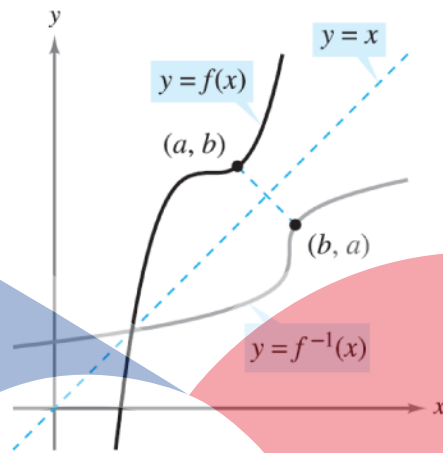
$$f(g(x)) = x \text{ 且 } g(f(x)) = x$$



下面用一個例子來說明如何求一個函數的反函數。

例題 16. 設 $f(x) = x^3 + 1$ ，求其反函數。

兩個反函數的函數圖形之間有一個重要的關係，即他們的圖形對稱於直線 $y=x$ 。若 (a,b) 是 $y=f(x)$ 的函數圖形上的任一點，則 $b=f(a)$ 。所以 $a=f^{-1}(b)$ ，即 (b,a) 在 $y=f^{-1}(x)$ 的函數圖形上，而座標點 (a,b) 和 (b,a) 是對稱於直線 $y=x$ ，因此 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的函數圖形是對稱於直線 $y=x$ 。



例題 17. 設 $f(x)=2x+1$ ，劃出 f 和 f^{-1} 的圖形。

指數函數對數函數：

因為指數函數 $f(x)=a^x$ 為一對一函數，故存在一反函數，定義為對數函數 $f^{-1}(x)=\log_a x$ 。

(7) 方程式

(a) 一元一次方程式

例題 18：解方程式： $2x+3=4x+5$

例題 19：解方程式： $3(x-1)-7(x+5)=30(x+1)$

(b) 二元一次方程組

例題 20：解方程式：
$$\begin{cases} 3x+2y=13 \cdots \cdots (1) \\ 5x-3y=9 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

(c) 一元二次方程式

例題 21：解方程式： $x^2-2x-4=0$

例題 22：解方程式： $9x^2-12x-1=0$

(d) 一元高次方程式

例題 23：解方程式： $x^5+x^4-x^3-x^2-2x-2=0$

(e) 指數方程式

例題 24：解方程式： $3^{x^2}=(3^x)^2$

例題 25：解方程式： $2 \times 2^{2x} + 3 \times 2^x - 2 = 0$

(f) 對數方程式

例題 26：解方程式： $\log x + \log(x+3) = 1$