(4) 含成函數(Composition Functions)

任給兩個函數 f 和 g，則 g 和 f 的合成函數（composition function）以符號 $f\circ g$ 表示，其定義為

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

例題 13：若 $f(x)=x^2-1,\ \ g(x)=\sqrt{x}+1$，求

(1) $(f\circ g)(x)$ 及其定義域

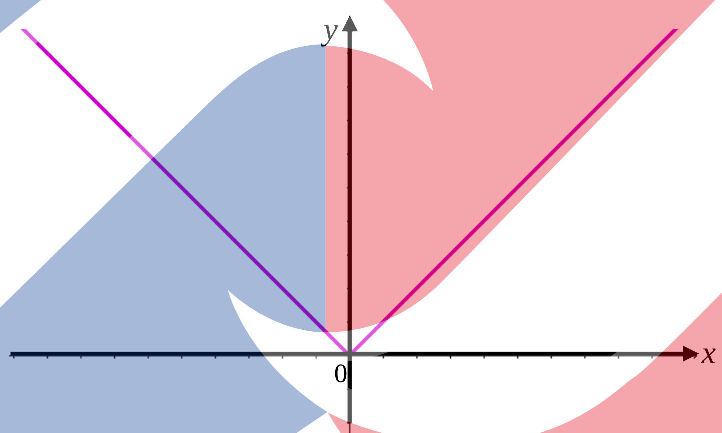
(2) $(g\circ f)(x)$ 及其定義域

(5) 特殊函數

(a) 絕對值函數(Absolute Functions)

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ;x\ge 0 \\ -x & ;x<0 \end{cases}$$

稱為絕對值函數(absolute value function)，其定義域為 $\mathbb{R}$ 。

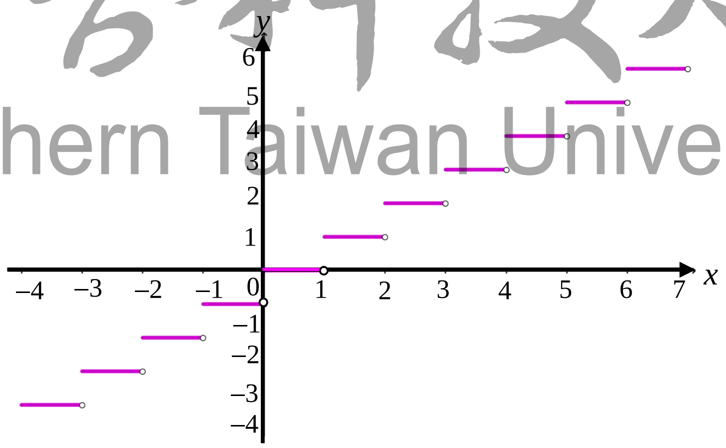


(b) 高斯函數(Gauss Functions)或最大整數函數(Greatest Integer Functions)

對於任意實數 x，我們以 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

例如：$[2.3]=2$，$[-\pi]=-4$，$[5]=5$ 等。

函數 $f(x)=[x]$ 稱為高斯函數(Gauss function)或最大整數函數(greatest integer function)，其定義域為 $\mathbb{R}$。

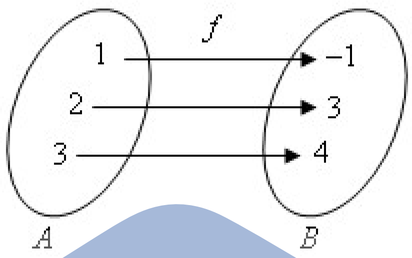


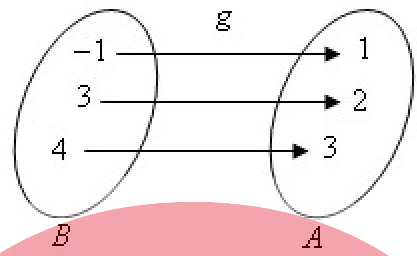
(c) 分段函數(piecewise function)

例題 14：設函數 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 0 \\ 1-x, & x>0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $x=-3$ 的函數值並劃出 $f(x)$ 的函數圖形。

(6) 反函數

考慮有下列映射（mapping）關係的兩個函數 f 和 g ：





由上圖可知 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)=1$，$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(3)=4$。事實上對所有 x 屬於 f 的定義域，我們均有 $(g\circ f)(x)=x$；而且對所有 y 屬於 g 的定義域，我們都有 $(f\circ g)(y)=y$。這時我們說 f 是 g 的反函數（inverse function），且 g 是 f 的反函數。顯然地，並不是任給一函數，它都會有反函數，至少應該滿足下列的特性。

定義：f 是 1-1 函數(one by one function)，如果 $x_1\ne x_2$，則 $f(x_1)\ne f(x_2)$。或者，若 $f(x_1)=f(x_2)$ 則 $x_1=x_2$ 。

例題 15：設 $f(x)=x^2$，則 f 不是 1-1 函數。因 $1\ne -1$ 但 $f(1)=f(-1)=1$。但我們若只考慮 $f(x)=x^2$ 是定義在開區間 $(0,\infty)$，則它是 1-1 的，因為若 $x_1\ne x_2$ 且 $x_1>0,\ x_2>0$ 則 $x_1^{\,2}\ne x_2^{\,2}$，所以 $f(x_1)\ne f(x_2)$。

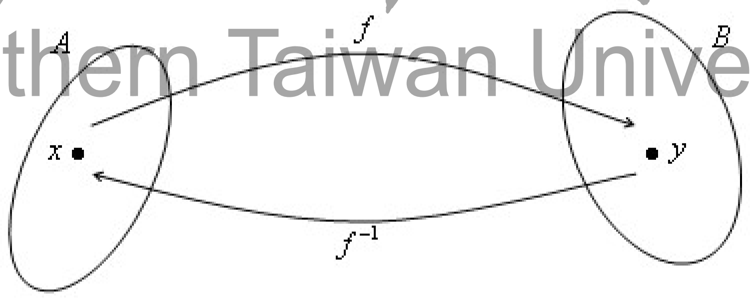
由這例子可看出同樣一個函數是否為 1-1，和當時所考慮的定義域有關。一般情況下任給一個函數時，如果沒有特別明講，其定義域是所有有定義的實數。

定義：設 f 是 1-1 函數，其定義域為 A，值域為 B，則其反函數存在，以 f^{-1} 表示，f^{-1} 是以 B 為定義域，A 為值域的函數且滿足

$$f^{-1}(y)=x \text{ 對 } y\in B \Leftrightarrow f(x)=y \text{ 對 } x\in A$$

習慣上，我們自變數用 x，所以當我們的焦點放在 f^{-1} 時，則 $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$。由上面的定義可知，兩個函數 f 和 g 互為反函數，亦可由下列式子來定義：

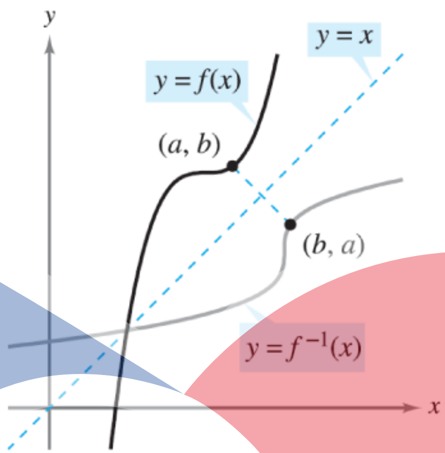
$$f(g(x))=x \quad \text{且} \quad g(f(x))=x$$



下面用一個例子來說明如何求一個函數的反函數。

例題 16. 設 $f(x)=x^3+1$，求其反函數。

兩個反函數的函數圖形之間有一個重要的關係，即他們的圖形對稱於直線 $y=x$。若 (a,b) 是 $y=f(x)$ 的函數圖形上的任一點，則 $b=f(a)$。所以 $a=f^{-1}(b)$，即 (b,a) 在 $y=f^{-1}(x)$ 的函數圖形上，而座標點 (a,b) 和 (b,a) 是對稱於直線 $y=x$，因此 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的函數圖形是對稱於直線 $y=x$。



例題 17.設 $f(x)=2x+1$，劃出 f 和 f^{-1} 的圖形。

指數函數對數函數：

因為指數函數 $f(x)=a^x$ 為一對一函數，故存在一反函數，定義為對數函數 $f^{-1}(x)=\log_a x$。

(7) 方程式

(a) 一元一次方程式

例題 18：解方程式：$2x+3=4x+5$

例題 19：解方程式：$3(x-1)-7(x+5)=30(x+1)$

(b) 二元一次方程組

例題 20：解方程式：$\begin{cases} 3x+2y=13\cdots\cdots(1) \\ 5x-3y=9\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(c) 一元二次方程式

例題 21：解方程式：$x^2-2x-4=0$

例題 22：解方程式：$9x^2-12x-1=0$

(d) 一元高次方程式

例題 23：解方程式：$x^5+x^4-x^3-x^2-2x-2=0$

(e) 指數方程式

例題 24：解方程式：$3^{x^2}=\left(3^x\right)^2$

例題 25：解方程式：$2\times 2^{2x}+3\times 2^x-2=0$

(f) 對數方程式

例題 26：解方程式：$\log x+\log(x+3)=1$