(3) 基本函數

(a) 多項式函數（Polynomial Functions）

形式如下的函數：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ \ (a_n\neq 0)$$

稱為 n 次多項式函數（polynomial function with degree n），這裡 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是常數，n 是非負的整數。

註：

(i) 多項式函數的定義域是所有的實數。

(ii) 當 $n=1$ 時，則 $f(x)=a_1x+a_0$，$a_1\neq 0$ 稱為線性函數（linear function）。

例題 6：繪線性函數的圖形：

(1) $x=3$	(2) $y=5$	(3) $2x+3y=6$

例題 7：繪二次函數 $y=f(x)=-2x^2-12x+1$ 的圖形。

例題 8：繪高次函數的圖形：

(1) $f(x)=x^3$	(2) $f(x)=x^4$

(b) 有理函數（Rational Functions）

所謂有理函數，即是兩個多項式函數相除所得到的新函數。若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是兩個多項式函數，則有理函數 $R(x)$ 可寫成如下：

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$R(x)$ 的定義域是 $\{x\,|\,g(x)\neq 0\}$。

例題 9：若 $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$，則 $R(x)$ 的定義域是

例題 10：繪函數 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的圖形。

(c) 冪函數（Power Functions）

若 $f(x)=x^r$，r 是任意實數，這種函數稱為冪函數，當然若 r 是一非負的整數，則 $f(x)=x^r$ 即是前面所介紹的 r 次多項式函數。

例題 11：定義域的計算

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定義域為

(2) $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}$ 的定義域為

例題 12：函數圖形

試繪下列各函數的圖形

(1) $f(x)=\sqrt{x}$	(2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(d) 指數函數(Exponential Functions)

一般型式的指數函數寫成如下的型式：

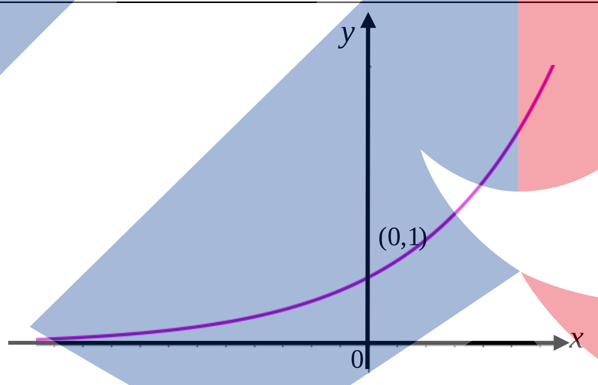
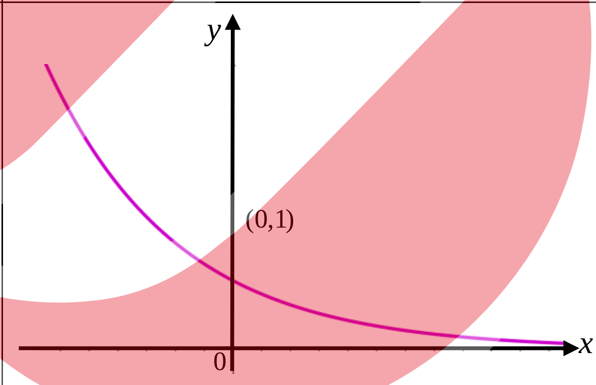
$$f(x)=a^{x},\ \ a>0,\ \ a\neq 1$$

，稱為以 a 為底（base）的指數函數。

指數函數的定義域為 $\mathbb{R}$

指數函數的值域為 $\{y\,|\,y>0\}$

指數函數的圖形可分為下列兩種情形：

(1) $a>1$	(2) $0<a<1$
	

指數函數性質：

(i) 指數函數為一對一函數，且為連續。

(ii) 指數函數的圖形必通過點 (0,1)

(iii)若 $a>1$，則指數函數為遞增函數；若 $0<a<1$，則指數函數為遞減函數

定理：指數律

(1) $a^{x}a^{y}=a^{x+y}$

(2) $\dfrac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$

(3) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

(4) $(ab)^{x}=a^{x}b^{x}$

我們規定當 $a\neq 0$ 時，$a^{0}=1$。而 0^{0} 沒有定義。

(e) 對數函數(Logarithmic Functions)

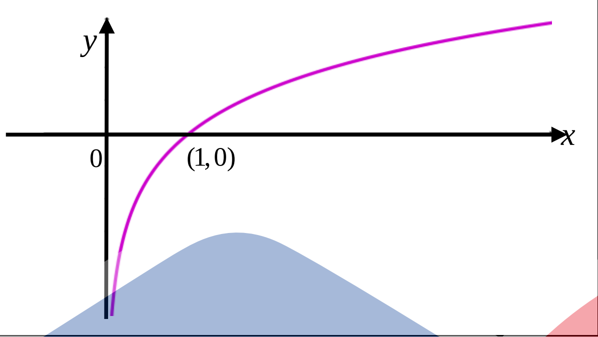
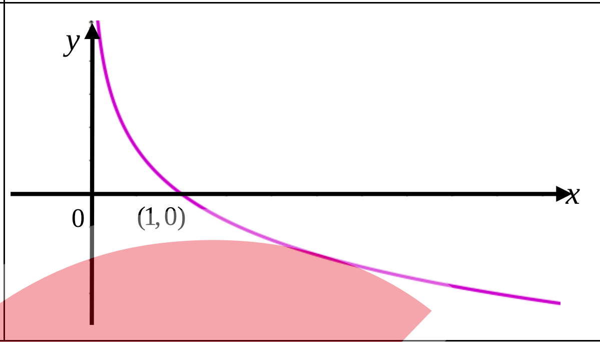
以 a 為底的對數函數（logarithmic function with base a），以符號 $\log_{a}$ 表示。即下式成立

$$y=\log_{a}x \Leftrightarrow x=a^{y}$$

對數函數的定義域為 $\{x\,|\,x>0\}$

對數函數的值域為$\mathbb{R}$

對數函數的圖形可分為下列兩種情形：

(1) $a>1$	(2) $0<a<1$
	

對數函數性質：

(i) 對數函數為一對一函數，且為連續。

(ii) 對數函數的圖形必通過點$(1,0)$

(iii)若$a>1$，則對數函數為遞增函數；若$0<a<1$，則對數函數為遞減函數

定理：對數律

(1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(2) $\log_a \dfrac{y}{x}=\log_a y-\log_a x$

(3) $\log_a x^r = r\log_a x$

(4) $\log_x y=\dfrac{\log_a y}{\log_a x}$ (換底公式)

以後我們討論到的指數函數和對數函數，主要是取一個特別的數當作底數，以符號e表示，它可由下面的無窮級數來定義

$$
\begin{aligned}
e &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \\
&= 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots \\
&= 2.71828\cdots
\end{aligned}
$$

以e為底的指數函數和對數函數，分別稱為自然指數函數（natural exponential function）和自然對數函數（natural logarithm function)。$\log_e x$我們常用一特別的符號來代替即$\log_e x \equiv \ln x$。所以我們有下列的式子：

$$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$$

由上式的關係，我們可得

$$y=\ln x=\ln e^y,\quad y\in\mathbb{R}$$

$$x=e^y=e^{\ln x},\quad x>0$$

又對$y=\log_a x$，當其底數$a\neq e$時，我們可用換底公式化成自然對數函數的型式，既

$$\log_e x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

同理，任意的指數函數$y=a^x$亦可化成自然指數函數的型式，既$a^x=e^{x\ln a}$表示。