

(3) 基本函數

(a) 多項式函數 (Polynomial Functions)

形式如下的函數：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

稱為 n 次多項式函數 (polynomial function with degree n)，這裡 a_0, a_1, \dots, a_n 是常數， n 是非負的整數。

註：

- (i) 多項式函數的定義域是所有的實數。
- (ii) 當 $n = 1$ 時，則 $f(x) = a_1 x + a_0$ ， $a_1 \neq 0$ 稱為線性函數 (linear function)。

例題 6：繪線性函數的圖形：

(1) $x = 3$	(2) $y = 5$	(3) $2x + 3y = 6$

例題 7：繪二次函數 $y = f(x) = -2x^2 - 12x + 1$ 的圖形。

例題 8：繪高次函數的圖形：

(1) $f(x) = x^3$	(2) $f(x) = x^4$

(b) 有理函數 (Rational Functions)

所謂有理函數，即是兩個多項式函數相除所得到的新函數。若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是兩個多項式函數，則有理函數 $R(x)$ 可寫成如下：

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$R(x)$ 的定義域是 $\{x \mid g(x) \neq 0\}$ 。

例題 9：若 $R(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ ，則 $R(x)$ 的定義域是

例題 10：繪函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的圖形。

(c) 冪函數 (Power Functions)

若 $f(x) = x^r$ ， r 是任意實數，這種函數稱為冪函數，當然若 r 是一非負的整數，則 $f(x) = x^r$ 即是前面所介紹的 r 次多項式函數。

例題 11：定義域的計算

(1) $f(x) = \sqrt{x-2}$ 的定義域為

(2) $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ 的定義域為

例題 12：函數圖形

試繪下列各函數的圖形

(1) $f(x) = \sqrt{x}$	(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(d) 指數函數(Exponential Functions)

一般型式的指數函數寫成如下的型式：

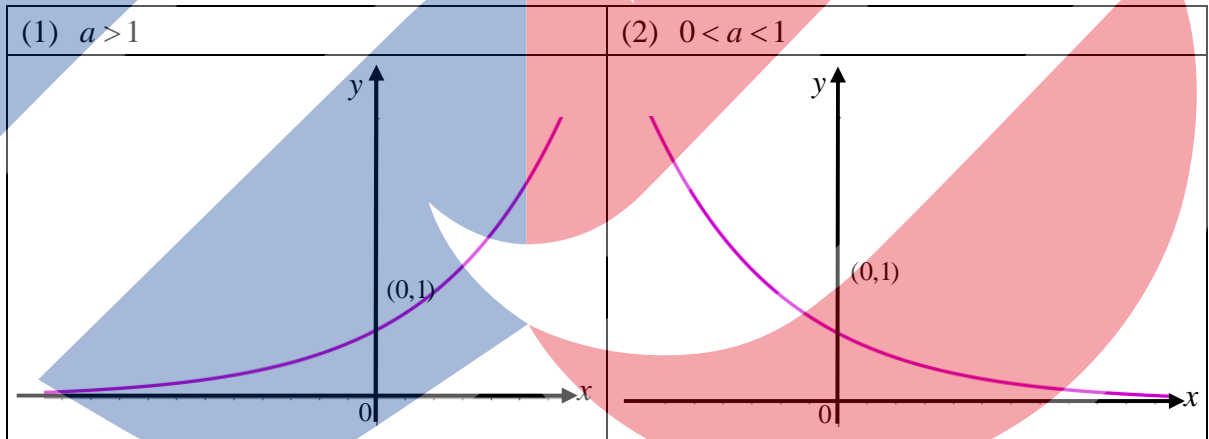
$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

，稱為以 a 為底 (base) 的指數函數。

指數函數的定義域為 \mathbb{R}

指數函數的值域為 $\{y \mid y > 0\}$

指數函數的圖形可分為下列兩種情形：



指數函數性質：

(i) 指數函數為一對一函數，且為連續。

(ii) 指數函數的圖形必通過點 $(0, 1)$

(iii) 若 $a > 1$ ，則指數函數為遞增函數；若 $0 < a < 1$ ，則指數函數為遞減函數

定理：指數律

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$

(2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x b^x$

我們規定當 $a \neq 0$ 時， $a^0 = 1$ 。而 0^0 沒有定義。

(e) 對數函數(Logarithmic Functions)

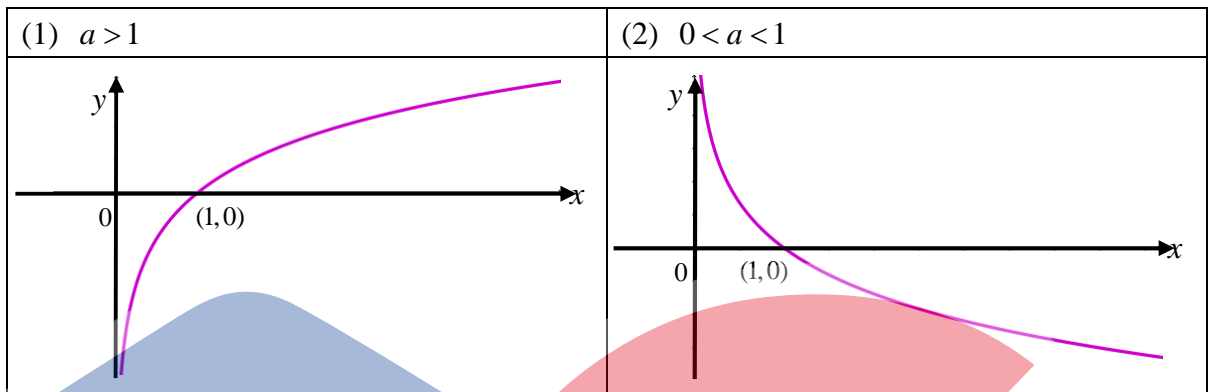
以 a 為底的對數函數 (logarithmic function with base a)，以符號 \log_a 表示。即下式成立

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

對數函數的定義域為 $\{x \mid x > 0\}$

對數函數的值域為 \mathbb{R}

對數函數的圖形可分為下列兩種情形：



對數函數性質：

- (i) 對數函數為一對一函數，且為連續。
- (ii) 對數函數的圖形必通過點 $(1, 0)$
- (iii) 若 $a > 1$ ，則對數函數為遞增函數；若 $0 < a < 1$ ，則對數函數為遞減函數

定理：對數律

- (1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- (2) $\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$
- (3) $\log_a x^r = r \log_a x$
- (4) $\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$ (換底公式)

以後我們討論到的指數函數和對數函數，主要是取一個特別的數當作底數，以符號 e 表示，它可由下面的無窮級數來定義

$$\begin{aligned}
 e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
 &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \\
 &= 2.71828 \dots
 \end{aligned}$$

以 e 為底的指數函數和對數函數，分別稱為自然指數函數 (natural exponential function) 和自然對數函數 (natural logarithm function)。 $\log_e x$ 我們常用一特別的符號來代替即 $\log_e x \equiv \ln x$ 。所以我們有下列的式子：

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

由上式的關係，我們可得

$$y = \ln x = \ln e^y, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$x = e^y = e^{\ln x}, \quad x > 0$$

又對 $y = \log_a x$ ，當其底數 $a \neq e$ 時，我們可用換底公式化成自然對數函數的型式，既

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

同理，任意的指數函數 $y = a^x$ 亦可化成自然指數函數的型式，既 $a^x = e^{x \ln a}$ 表示。