

0-3 函數(Function)及其圖形(Graph)

探討自然現象與社會現象等各種問題的過程中，通常需先將實際的問題轉換數學模式，再以數學方法來求其解。而在上述解題的「轉換」過程中，函數 (function)扮演著主要的角色。

(1) 函數的定義

定義：任給 A 、 B 兩個集合 (set)，若對 A 中的每一個元素，恰有 B 中的唯一一個元素被其對應到，則我們說從 A 到 B 有一個函數關係 (function)。以符號 $f: A \rightarrow B$ 表示。 f 表示此函數的名稱。

註： $f(x)$ 稱為 f 在 x 的函數值 (value)。 A 稱為函數 f 的定義域(domain)，在 B 中，有被 A 中的元素對應到的元素的集合，稱為 f 的值域(range)。若 y 屬於 f 的值域，我們可寫成 $y = f(x)$ ，稱為 y 是 x 的函數。這裡 x 稱為函數 f 的自變數 (independent variable)， y 稱為因變數 (dependent variable)。

例題 1：函數的描述

(1) 圓的半徑與面積：當圓的半徑為 x 時，此圓的面積為 πx^2 。式子 $y = \pi x^2$ 說明了兩個變量 x 與 y 之間的對應關係。

(2) 普通資費表

費用 (元) 新台幣	種類	信函						印刷物					
		普通	限時	掛號	限時掛號	掛號附回執	限時掛號附回執	普通	限時	掛號	限時掛號	掛號附回執	限時掛號附回執
重量 (公克)													
不逾20	5	12	25	32	34	41	3.5	10.5	23.5	30.5	32.5	39.5	
21-50	10	17	30	37	39	46	3.5	10.5	23.5	30.5	32.5	39.5	
51-100	15	22	35	42	44	51	7	14	27	34	36	43	
101-250	25	32	45	52	54	61	10	17	30	37	39	46	
251-500	45	52	65	72	74	81	20	27	40	47	49	56	
501-1000	80	87	100	107	109	116	35	42	55	62	64	71	
1001-2000	130	137	150	157	159	166	55	62	75	82	84	91	
新聞紙	每重50公克1.25元(每件限重不逾二公斤)												
雜誌	每重50公克1.75元(每件限重不逾二公斤)												
明信片	每件2.50元，限時專送明信片每件9.5元												
小包	每重100公克10元(每件限重不逾一公斤)												
郵筒	每件4元												

(3) 需求函數 (demand function)是用來描述產品的價格 p 和在該價格下所能銷售的數量 (或顧客的需求量) x 間的關係函數，以 $x = d(p)$ 表示。在自由市場裏，價格的改變會影響銷售量(比如說，價格愈高，銷售量就愈少)；可售量的改變也會影響價格(一般而言，物品愈缺乏，價格就變得愈高)。

例題 2：函數的判定

(1) 若 $y = x^2$ 。請問我們可以說 y 是 x 的函數嗎？為什麼？

(2) 若 $y^2 = x$ 。請問我們可以說 x 是 y 的函數嗎？為什麼？

例題 3：函數值的計算

(1) 若 $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ，求 $f(-2)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(3)$

(2) 若 $f(x) = \sqrt{x+1}$ ，求 $f(-2)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(3)$

(3) 若 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ，求 $f(-2)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(3)$

(4) 若 $f(x) = \begin{cases} x-1 & ;x \geq -1 \\ x^2+3 & ;x < -1 \end{cases}$ ，求 $f(-2)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(3)$

例題 4：函數的定義域與值域

試求下列各函數的定義域與值域：

(1) $f(x) = x^2 + x$

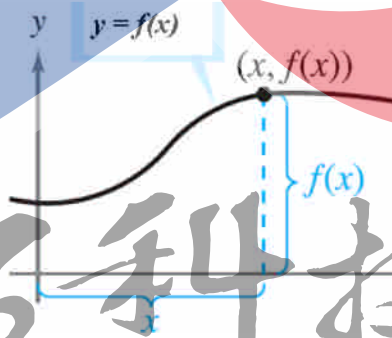
(2) $g(x) = \frac{1}{x+1}$

(3) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(2) 函數圖形

設有一函數 $f(x)$ ，其定義域為 A ，則在坐標平面上，由所有數對 $(x, f(x))$ 所成的集合，其中 $x \in A$ ，稱為函數 $f(x)$ 的圖形，亦即

函數 $f(x)$ 的圖形 = $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$



畫出函數圖的三個步驟：

步驟 1：在函數 f 的定義域中選取一些點 x ，並計算函數 f 在這些點的值 $f(x)$ 。

步驟 2：在坐標平面上標出這些點 $(x, f(x))$ 。

步驟 3：將步驟 2 所標出的點用平滑曲線連接起來。

例題 5：描繪函數 $f(x) = x^3$ 的圖形。