十一章 簡單線性迴歸 (Simple Linear Regression)

- 11.1導論

  給定兩組資料

	X	Y
1	x_1	Y_1
2	x_2	Y_2
⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n

可探討兩個問題

1、兩變數間有無線性相關

→ 共變異數、相關係數

2、是否可用變數X預測變數Y

→ 迴歸分析

- 迴歸分析的目的在找出變數間的關係式

即 $Y= f(X)$ ，

其中X稱為獨立變數(預測變數)

Y稱為反應變數(準測變數)

當 $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ 稱為簡單線性迴歸

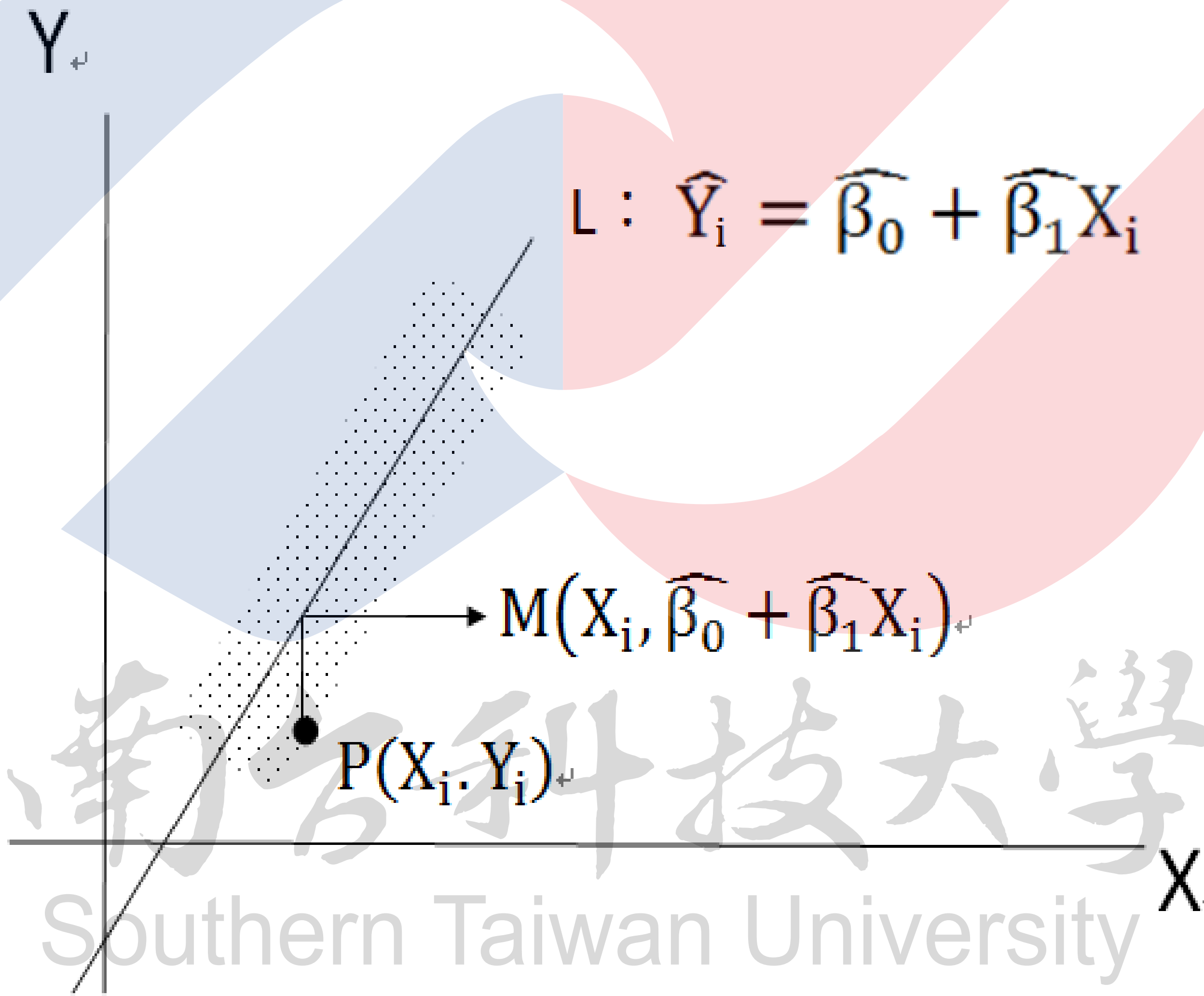
β_0 是截距

β_1 是迴歸係數

如何計算 β_0 , β_1

- 普通最小平方法(Ordinary Least Squares Mothed)

估計 β_0, β_1



- 給定P點(X_i, Y_i),由P點作X軸垂線,與L的交點 $M(X_i, \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i)$,則長度$\overline{PM}$ 的平方為

  $$[y_i - (\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i)]^2$$

  假設所有的樣本點所寫成的平方和為Q

  則 $$Q = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i)]^2$$

  利用微積分偏微分的概念,對$\widehat{\beta_0}$及$\widehat{\beta_1}$ 偏微分且令其為 0，即

$$\frac{\partial Q}{\partial \widehat{\beta_0}} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[Y_i - \left(\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i\right)\right](-1) \overset{令}{=} 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \widehat{\beta_1}} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[Y_i - \left(\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i\right)\right](-X_i) \overset{令}{=} 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

由（1）$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i\right) = n\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

由（2）$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\beta_0} X_i + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\beta_1} X_i^{\,2} = \widehat{\beta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i + \widehat{\beta_1}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{\beta_1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = r\,\dfrac{S_y}{S_x} \\[2em] \widehat{\beta_0} = \overline{Y} - \widehat{\beta_1}\overline{X} \end{cases}$$

所獲得的迴歸線 $\widehat{Y_i} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X_i$

- 11.2 簡單迴歸模式之假設

為了對迴歸模式參數 β_0 及 β_1 進行統計推論必須給予迴歸模式基本假設

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

其中誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

$$\Longrightarrow Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$$

- 上述的基本假設可歸納為

1、條件常態分配

$$\Longrightarrow Y_i|X_i \sim N\left(\beta_0+\beta_1 X_i, \sigma^2\right)$$

2、條件變異數皆相等

$$\Longrightarrow V(Y_1|X_1)=V(Y_2|X_2)=\cdots=V(Y_n|X_n)=\sigma^2$$

3、條件期望值 $E(Y_i|X_i)$ 均落在一直線上

$$\Longrightarrow E(Y_i|X_i)=\beta_0+\beta_1 X_i$$

4、$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 互相獨立

迴歸分析常用到的公式

1、$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

2、$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$

3、$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

4、$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$

$= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n}$

(X的

$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

5、$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

$= \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n}$

(X,Y的交叉平方和)

6、$SSE = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$

(殘差平方和)

7、$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

(迴歸平方和)

- 以最小平方法所求得的最小平方估計量有下列五個

(1) $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ 為極小值

(3) $\sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i = 0$

(4) $\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \varepsilon_i = 0$

(5) $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X - \bar{X})$,表示預測方程式必通過 $(\bar{X}, \bar{Y})$

- 共變異數及相關系數

給定兩組資料

	X	Y
1	x_1	Y_1
2	x_2	Y_2
⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n

則X與Y之樣本共變異數 $COV(X,Y)$ 及樣本相關係數 r_{xy} 定義如下

$$COV(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{n}\right)$$

$$r_{xy}=\frac{COV(X,Y)}{S_XS_Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2}{n}}}$$

$COV(X,Y) > 0$ 則 $r_{xy} > 0$ 表示X與Y為正線性相關

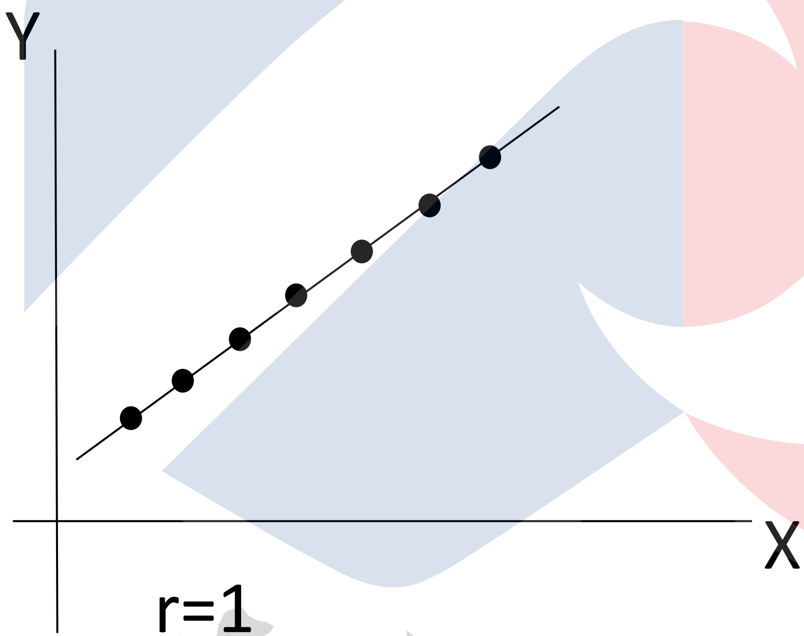
$COV(X,Y) < 0$ 則 $r_{xy} < 0$ 表示X與Y為負線性相關

$COV(X,Y) = 0$ 則 $r_{xy} = 0$ 表示X與Y為無線性相關

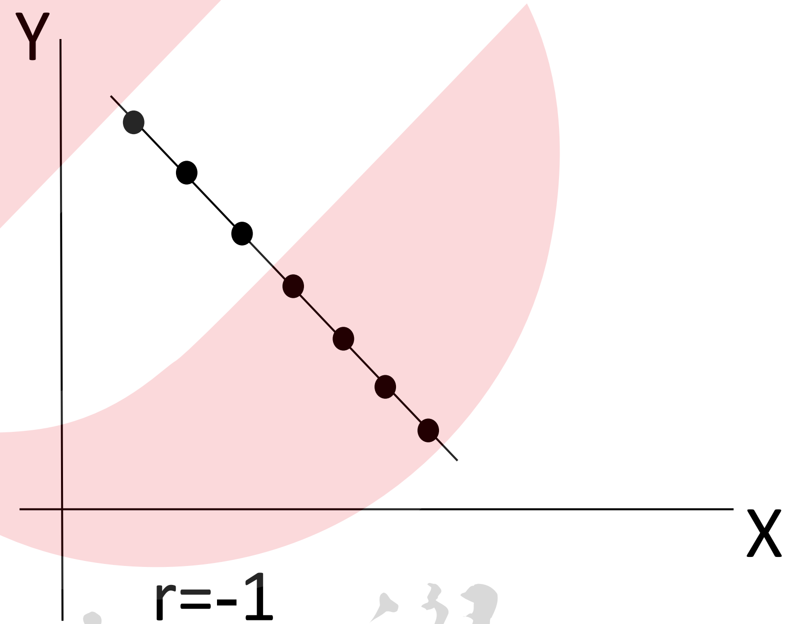
其中 $COV(X,Y) \in (-\infty, \infty)$ 無從判斷相關程度

$r \in [-1,1]$,故由相關係數可判斷X與Y相關程度的強度及方向。

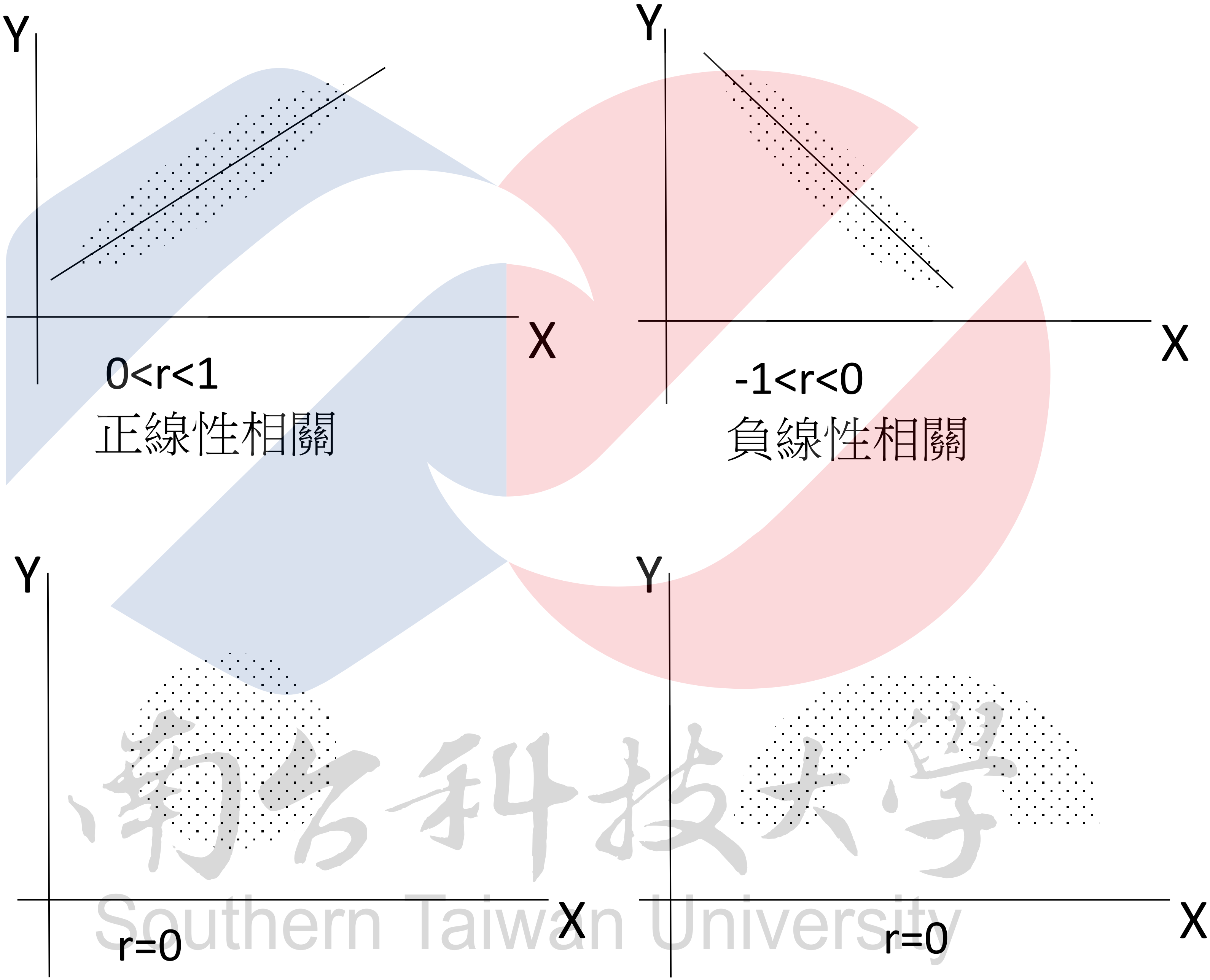
- 由圖說明相關系數



完全正線性相關



完全負線性相關



無線性相關

- 例：美日公司在一月至八月的廣告支出與獲益

單位：萬元

月份	廣告支出	獲益
1	4	40
2	4	50
3	6	50
4	5	60
5	3	40
6	6	60
7	2	40
8	3	30

試求樣本共變異數及樣本相關係數

- Sol ：

月份	x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2	y_i^2
1	4	40	160	16	1600
2	4	50	200	16	2500
3	6	50	300	36	2500
4	5	60	300	25	3600
5	3	40	120	9	1600
6	6	60	360	36	3600
7	2	40	80	4	1600
8	3	30	90	9	900
總和	33	370	1610	151	17900

$$\| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \|$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$COV(X,Y) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{8-1}\left(1610 - \frac{(33)(370)}{8}\right) = 11.964$$

$$S_x{}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right) = \frac{1}{8-1}\left(151 - \frac{33^2}{8}\right) = 2.125$$

$$S_y{}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}\right) = \frac{1}{8-1}\left(17900 - \frac{370^2}{8}\right) = 112.5$$

$$r_{xy} = \frac{COV(X,Y)}{S_X S_Y} = \frac{11.964}{\sqrt{2.125}\sqrt{112.5}} = 0.774$$

- 迴歸模式參數β_1的統計推論

明顯地以$\widehat{\beta_1} \xrightarrow{\text{推論}} \beta_1$，已知 $\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

由此可證明

(1) $E(\widehat{\beta_1}) = \beta_1$

(2) $V(\widehat{\beta_1}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

(3) $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2), i = 1,2,\ldots,n$，

則獨立隨機變數 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$的線性組合

亦具有常態分配。

- 即 $\widehat{\beta_1} \sim N\left(\beta_1\ ,\ \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)$

所以

$$\frac{\widehat{\beta_1}-E(\widehat{\beta_1})}{\sqrt{V(\widehat{\beta_1})}}=\frac{\widehat{\beta_1}-\beta_1}{\sqrt{\sigma^2/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\sim N(0,1)$$

已知SSE=$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\widehat{Y}_i\right)^2$

且MSE=$\dfrac{SSE}{n-2}$ (均方誤)

$\Longrightarrow E(MSE)=\sigma^2$

- 當 σ^2 未知，以MSE估計σ^2

則$\dfrac{\widehat{\beta_1}-\beta_1}{\sqrt{\text{MSE}/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \sim t(n-2)$

求 β_1 之 $100(1-\alpha)\%$ C.I.

一般而言， σ^2未知且小樣本

則

$1-\alpha=$

$$p\left(-t_{\alpha/2}^{(n-2)} < \frac{\widehat{\beta_1}-\beta_1}{\sqrt{\text{MSE}/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \sim -t_{\alpha/2}^{(n-2)}\right)$$

$$= p\left(\widehat{\beta_1} - t_{\alpha/2}^{(n-2)}\sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} < \beta_1 < \widehat{\beta_1} + t_{\alpha/2}^{(n-2)}\sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}\right)$$

因此

$$\left[\widehat{\beta_1} - t_{\alpha/2}^{(n-2)}\sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}},\ \widehat{\beta_1} + t_{\alpha/2}^{(n-2)}\sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}\right]$$

為β_1之$100(1-\alpha)\%$ C.I.

上述信賴區間提供如下資訊

$[+,+] \rightarrow \beta_1 > 0$，表示X,Y具有正線性相關。

$[-,-] \rightarrow \beta_1 < 0$，表示X,Y具有負線性相關。

$[-,+] \rightarrow \beta_1 = 0$，表示X,Y具無線性相關。

- 給定顯著水準α，求下列假設檢定

$H_0: \beta_1 = 0$

$H_1: \beta_1 \neq 0$

在H_0為真之下 $(\beta_1 = 0)$

$$\frac{\widehat{\beta_1}}{\sqrt{\mathrm{MSE} / \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \sim t(n-2)$$

拒絕H_0 if $\widehat{\beta_1} > C_2$ or $\widehat{\beta_1} < C_1$

$\alpha = p(\text{拒絕}H_0|H_0\text{為真})$

$= p(\widehat{\beta_1} > C_2 \text{ or } \widehat{\beta_1} < C_1 | \beta_1 = 0)$

$$\frac{\alpha}{2} = p\left(\widehat{\beta_1} > C_2 \middle| \beta_1 = 0\right)$$

$$= p\left(\frac{\widehat{\beta_1}}{\sqrt{\mathrm{MSE}/\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}} > \frac{C_2}{\sqrt{\mathrm{MSE}/\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}\right)$$

$$= p\left(T > t_{\alpha/2}{}^{(n-2)}\right)$$

$$\therefore \frac{C_2}{\sqrt{\mathrm{MSE}/\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}} = t_{\alpha/2}{}^{(n-2)}$$

$$C_2 = t_{\alpha/2}{}^{(n-2)}\sqrt{\frac{\mathrm{MSE}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}$$

同理$C_1 = -t_{\alpha/2}^{(n-2)} \sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}$

拒絕 H_0 if $\widehat{\beta_1} > t_{\alpha/2}^{(n-2)} \sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}$ or

$$\widehat{\beta_1} < -t_{\alpha/2}^{(n-2)} \sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}$$

$\Longrightarrow$ 拒絕 H_0 if $t > t_{\alpha/2}^{(n-2)}$ or $t < -t_{\alpha/2}^{(n-2)}$

$\Longrightarrow$ 拒絕 H_0 if $|t| > t_{\alpha/2}^{(n-2)}, t < \frac{\widehat{\beta_1}}{\sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}}$

- 11.3 異變數分析(ANOVA)

總平方和

$$= SST$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)}_{=0}$$

$$= SSE + SSR$$

＝誤差平方和＋迴歸平方和

SST的自由度＝SSR的自由度＋ SSE的自由度

n－1　＝　1　＋（n－2）

定義：迴歸均方MSR及誤差均方MSE

$$MSR = \frac{SSR}{1}$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-2}$$

由證明可獲得

$$E(MSR) = \sigma^2 + \beta_1{}^2 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$E(MSE) = \sigma^2$$

當 $\beta_1 = 0 \Rightarrow E(MSR) = E(MSE)$

$\beta_1 \neq 0 \Rightarrow E(MSR) > E(MSE)$

考慮如下假設檢定

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

可改寫為

$$H_0: E(MSR) = E(MSE)$$

$$H_1: E(MSR) > E(MSE)$$

在 H_0 為真之下

$$\frac{SSR}{\sigma^2} \sim x^2(1)$$

$$\frac{SSE}{\sigma^2} \sim x^2(n-2)$$

且SSR 與 SSE 獨立

則

$$F = \frac{\frac{SSR}{\sigma^2}/1}{\frac{SSE}{\sigma^2}/(n-2)} = \frac{MSR}{MSE} \sim F(1, n-2)$$

決策法則

拒絕 H_0 if $F = \frac{MSR}{MSE} > F_\alpha^{(1,n-2)}$

- 變異數分析表

變異來源	平方和	自由度	均方和	F值	P值
迴歸差	$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	1	$MSR=\frac{SSR}{1}$	$F=\frac{MSR}{MSE}$	
誤差	$SSE=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	n-2	$MSE=\frac{SSE}{n-2}$		
總變異	$SST=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$	n-1			

判定係數R^2 (Cofficient of Determination)

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

表示：預測變數 X 進入迴歸模式後,對反應變數Y 的變異降低之比例,或稱為 X 對Y 的變異解釋之能力

R^2之性質

(1) $0 \le R^2 \le 1$

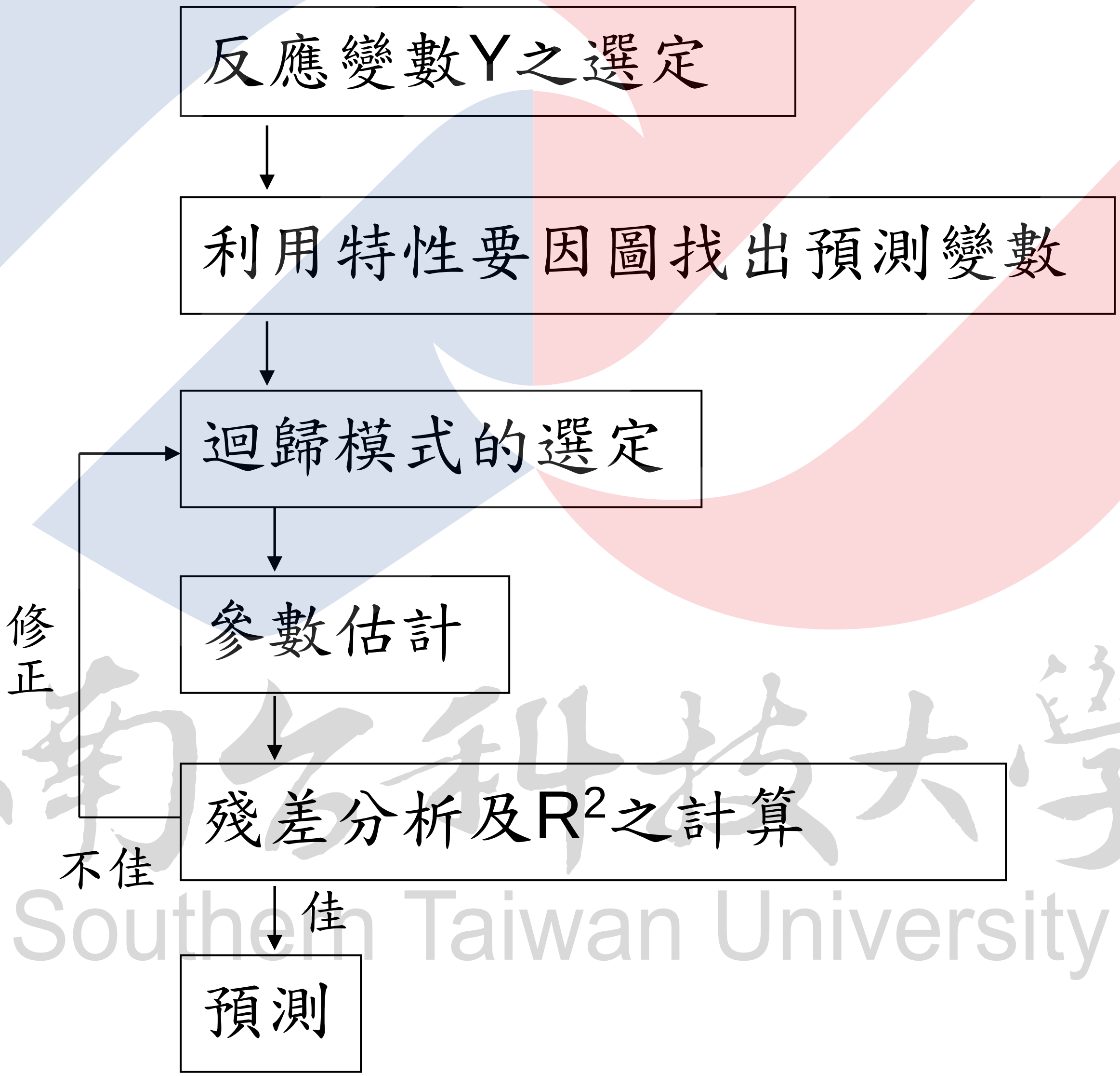
(2) R^2越大, X 表示解釋Y 變異之能力越強及所考慮的迴歸模型擬合了更好或更合適

(3) $R^2 = r^2$

(4) $SSE = S_{yy}(1 - R^2) = SST(1 - R^2)$

11.4 迴歸模式之建立與殘差分析

- 回歸模式建立之步驟



殘差分析

使用殘差分析檢查迴歸模式是否滿足基本假設一般檢查項目包括：

(1) 簡單線性模式 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ 是否為正確模式？

(2) ε_i是否具有共同變異數σ^2？

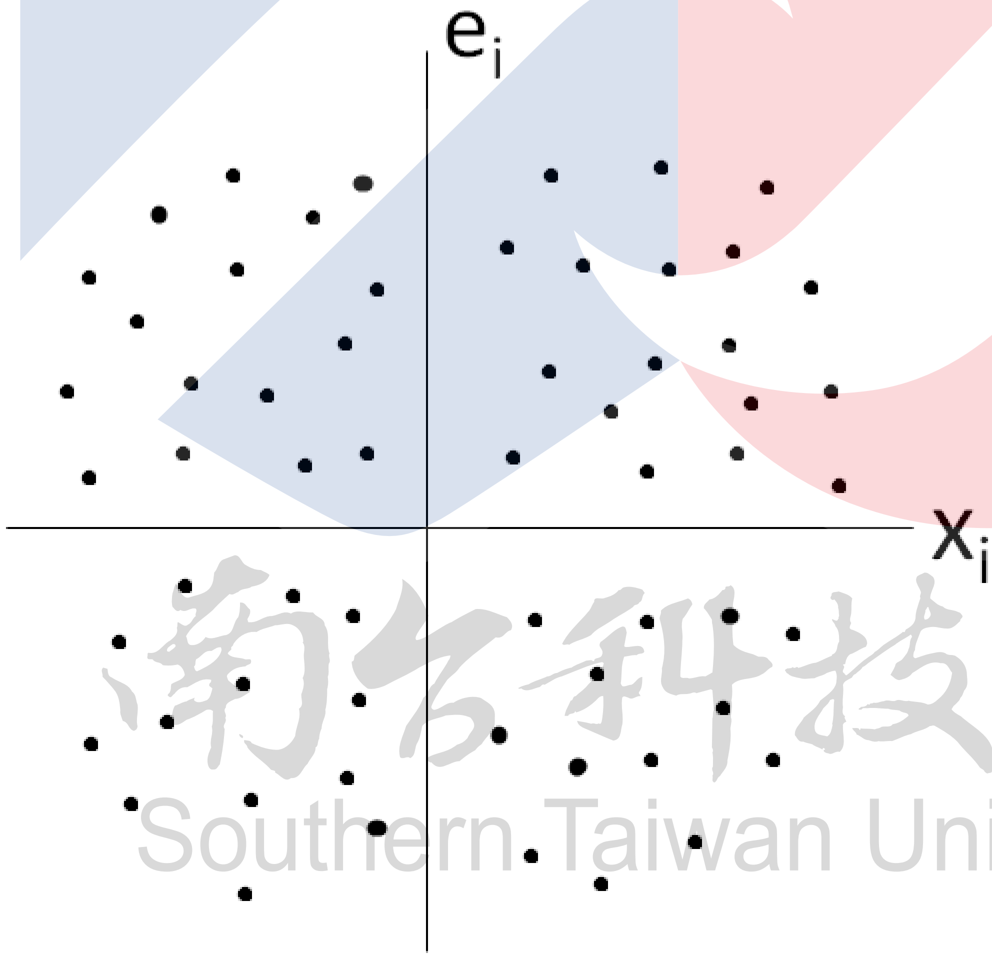
(3) ε_i是否獨立？

(4) ε_i是否為常態分配？

- 殘差 e_i 定義為$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

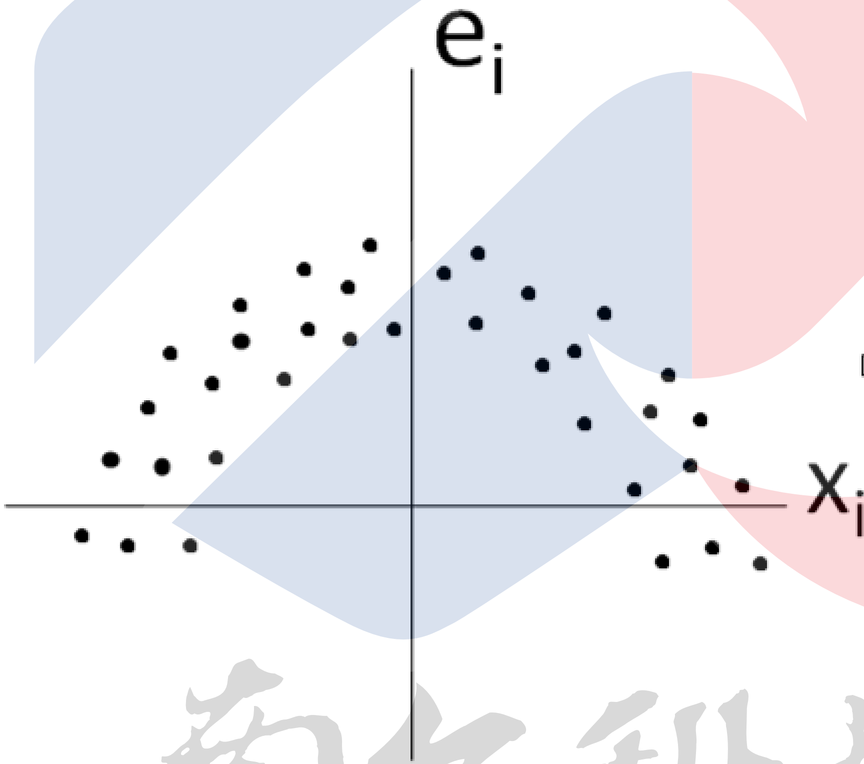
~~由下列圖形說明檢查項目~~

(1) 殘差成隨機散佈帶狀



表示所選定的迴歸模式是正確

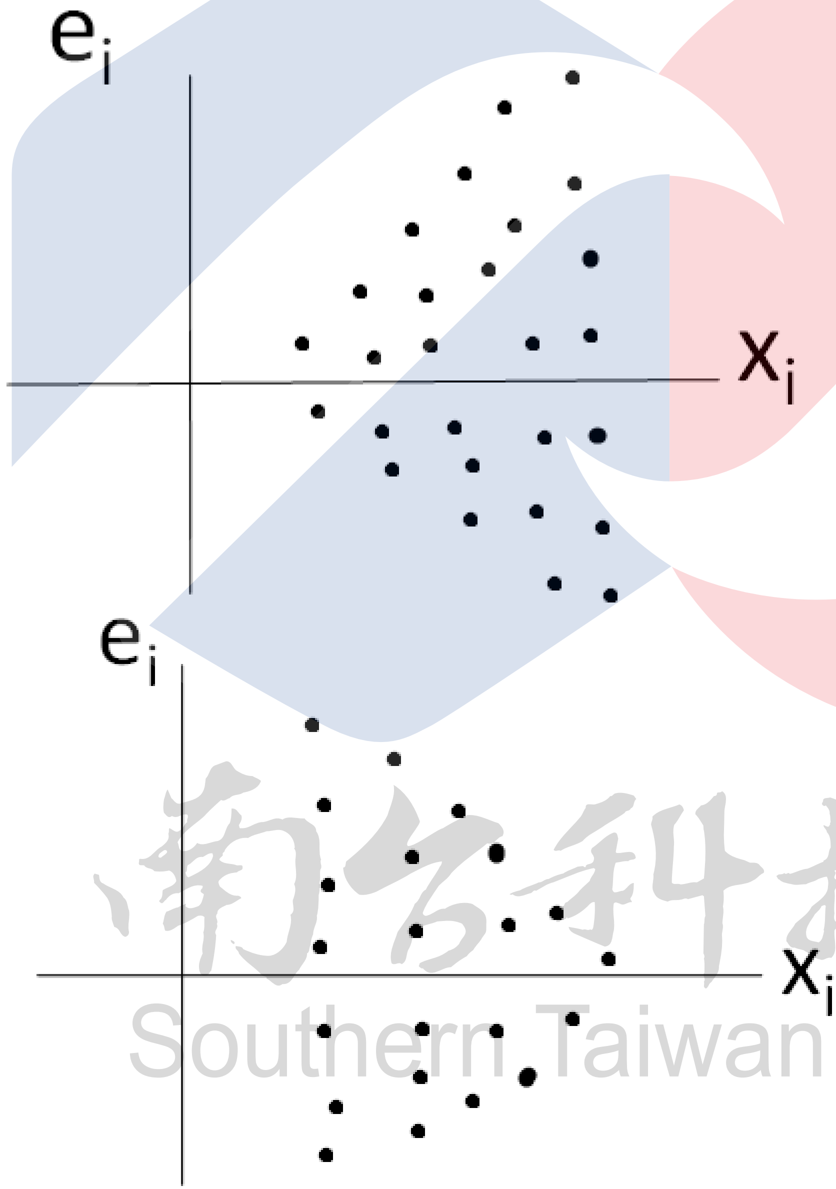
(2) 殘差呈次式形狀



表示簡單迴歸模式不適合應將模式改為

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^{\,2} + \varepsilon_i$$

(3) 殘差隨 x_i 增大而變大(變小)



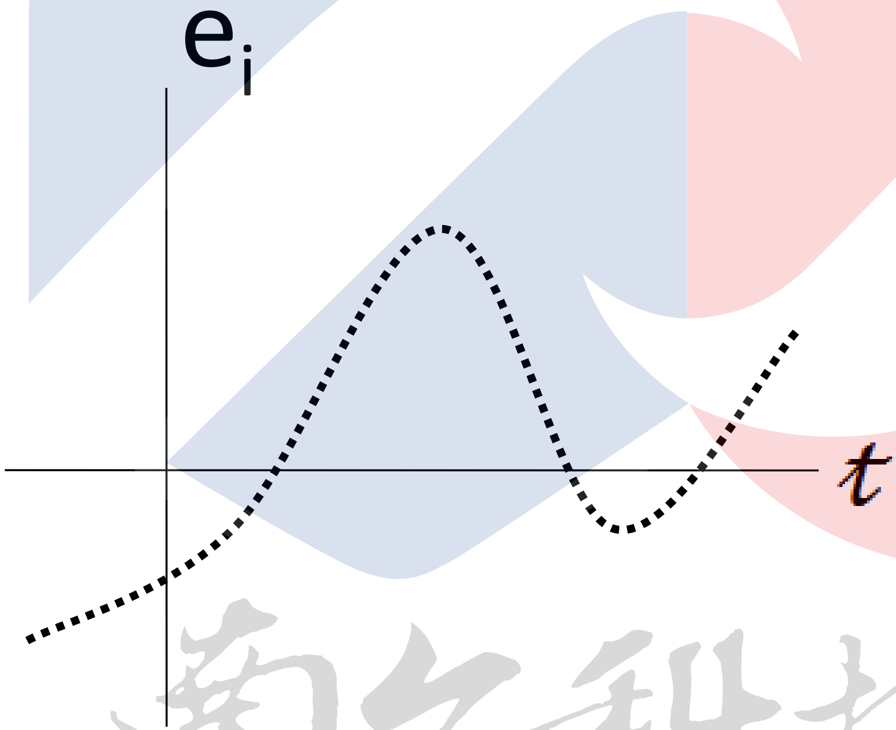
⇨ 表示變異數不一致解決方法

1、變數變換

2、加入其他預測變數

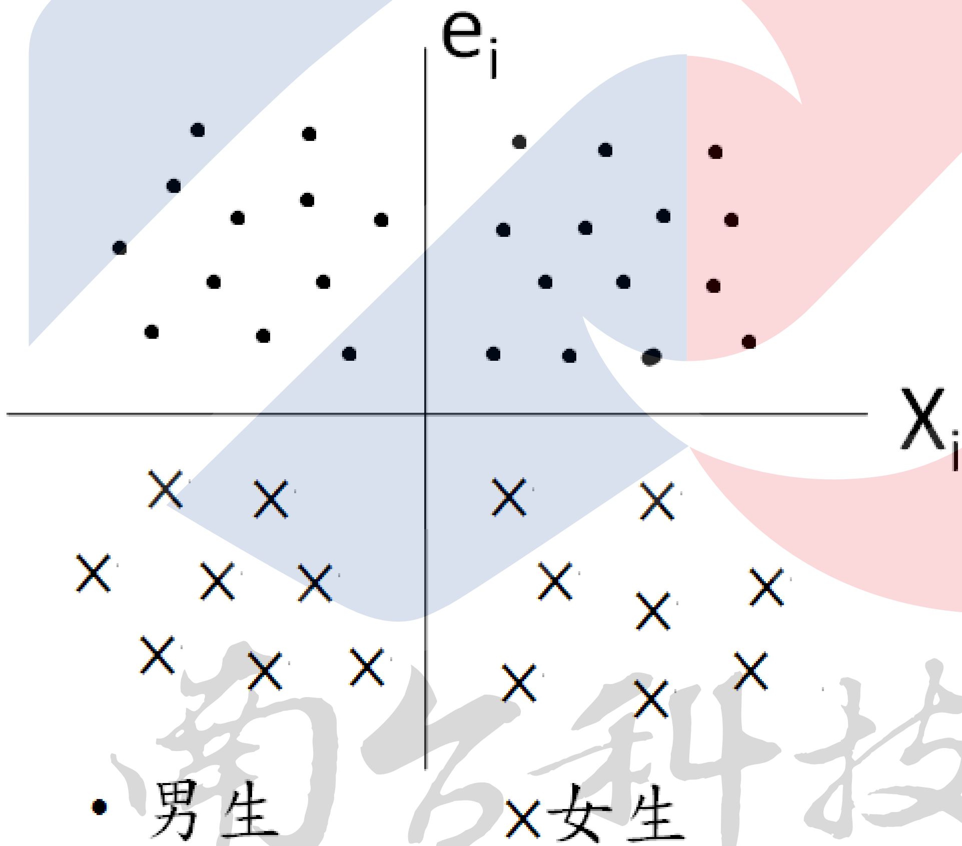
3、使用非線性迴歸

(4) 殘差成自我相關形狀



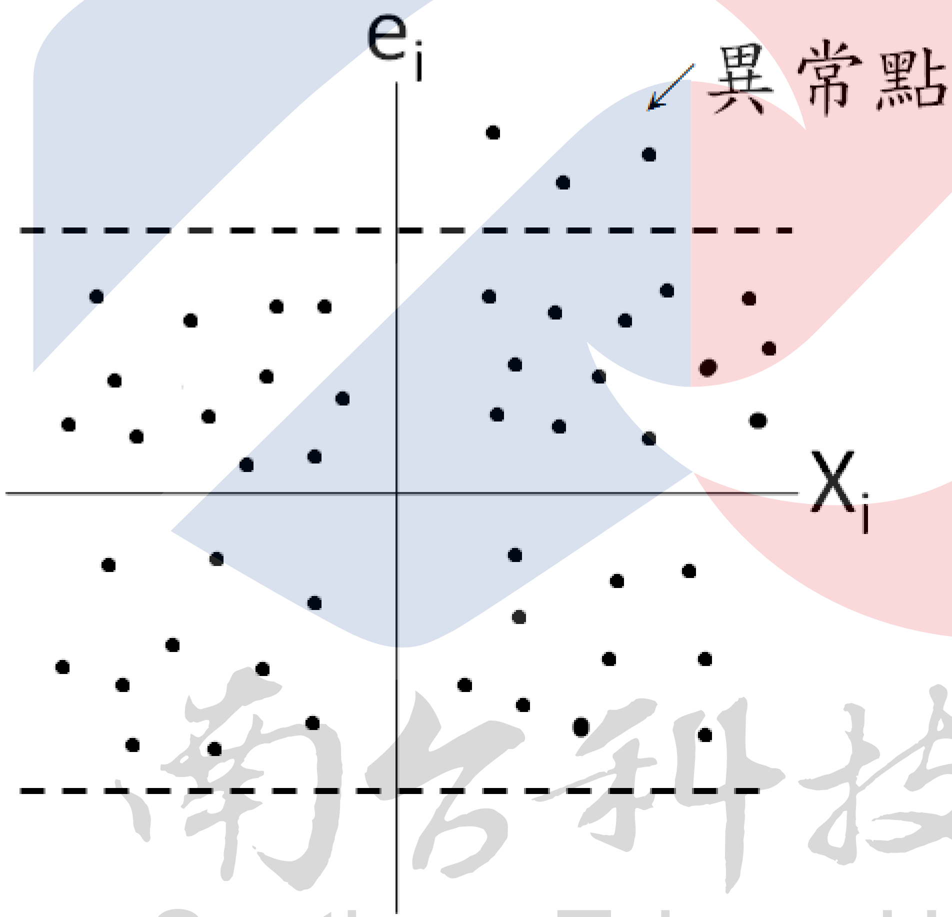
表示Y_i與Y_{i-1}相關，違反了獨立的假設，須利用時間數列的自我回歸模式來解決。

(5) 需要加入其他重要變數



可考慮男生，女生分開討論或者再加入其他變數。

（6）異常點（Outlier）



超過±3個標準差視為異常點，必須找出異常的原因，是人為還是特殊訊息？

(7) 檢查是否服從常態分配

1、以殘差畫出直方圖，如果呈現鐘形，即表示殘差服從常態分配。

2、利用常態機率圖(Q-Qplot)，如果點的散佈近似成一直線，表示殘差服從常態分配。

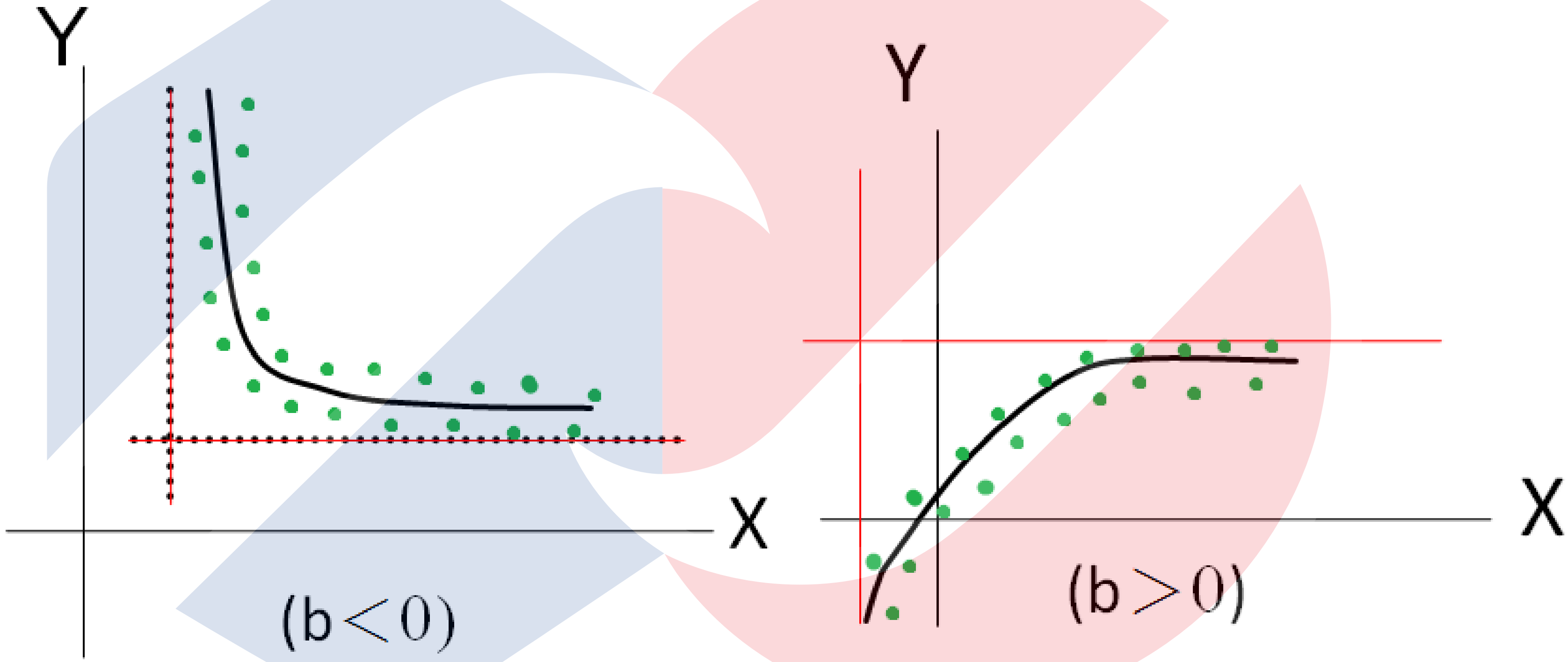
- 常態機率圖 (quantile-quantile plot：q-q plot)
- 步驟 1：計算n筆的殘差值，由小至大排列成 $e_{(1)}, e_{(2)}, \cdots, e_{(n)}$
- 步驟 2： n筆資料產生 $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$
- 步驟 3：已知 $Z \sim N(0,1)$ 利用 $P(Z < Z_i) = \frac{i}{n+1}$ 查表求 z_i , $i = 1,2, \ldots, n$
- 步驟 4：產生n個座標點 $(e_{(1)}, z_1), (e_{(2)}, z_2), \ldots, (e_{(n)}, z_n)$
- 步驟 5：步驟 4的n個座標點，標示在座標上，如果n個座標點越接近一直線，表示殘差資料越接近常態分配，及誤差項可視為來自常態分配。

- 11.6 變數變換(Vaviable Transformation)

　　線性模式最簡單且易於分析，然而很多情況線性模式並不適合，解決此問題最快的方法是變數變換。

- 步驟 1：將收集資料(X_1,Y_1)，$(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$標示在座標上
- 步驟 2：由座標點所形成的散佈圖，可看出反應變數 Y 與預測變數 X 之函數關係。
- 步驟 3：利用變數變換將兩變數的關係轉換成線性關係。
- 下列圖形說明變數轉換的方式。

1、X,Y 之散佈圖

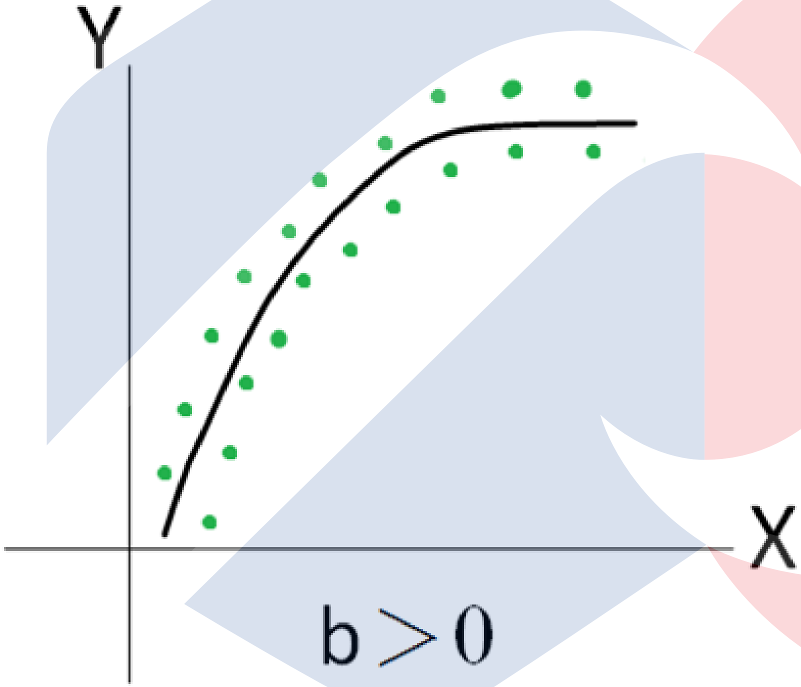


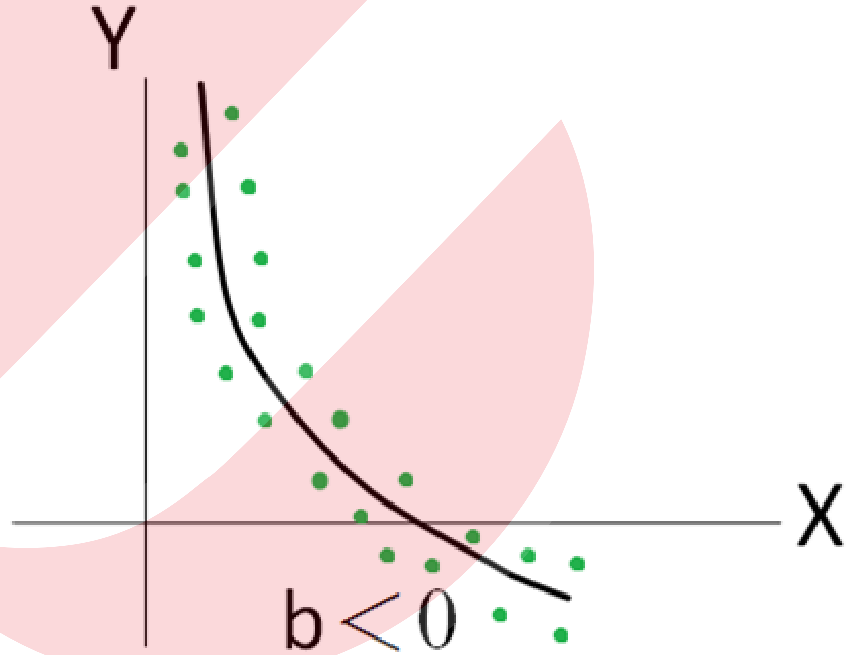
雙曲線 $\frac{1}{Y} = a + \frac{b}{X}$

令 $y^* = \frac{1}{Y}, x^* = \frac{1}{X}$

$\Rightarrow y^* = a + bX^*$

2、X,Y 之散佈圖



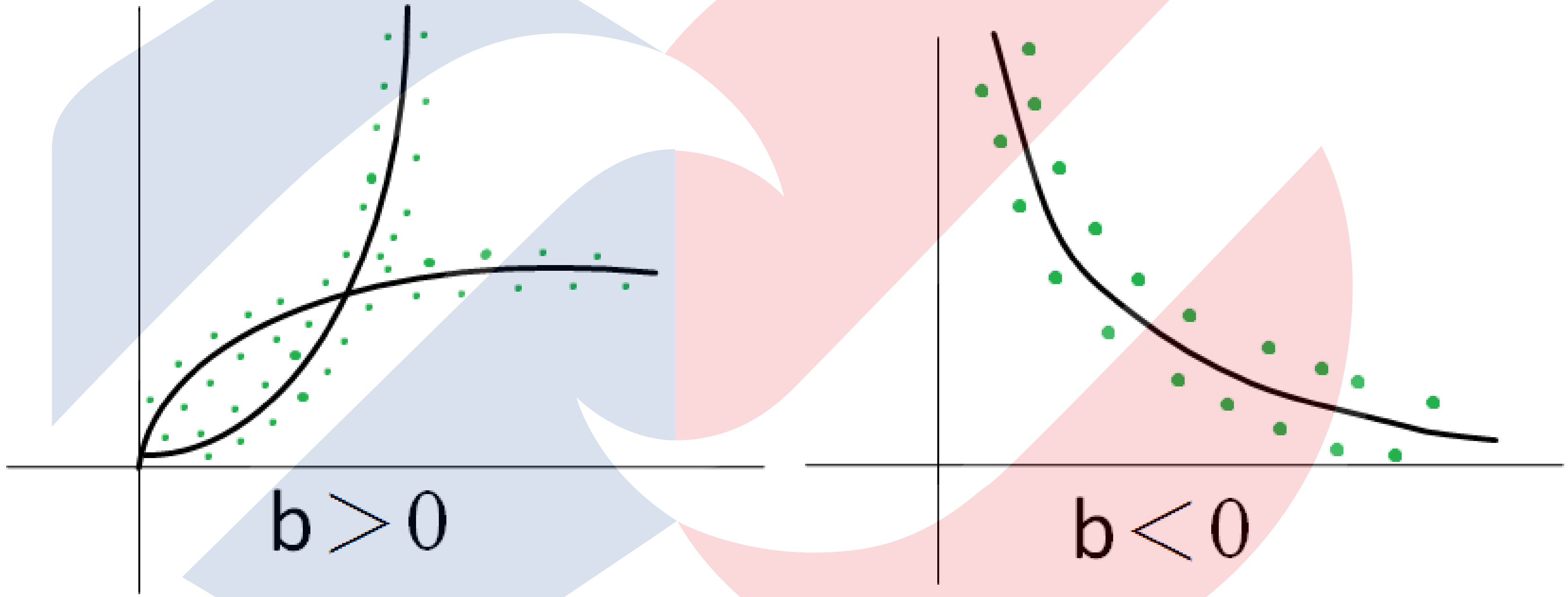


對數曲線 $Y = a + b\ell nX$

令 $X^* = \ell nX$

$\Rightarrow Y = a + bX^*$

3、X,Y 之散佈圖

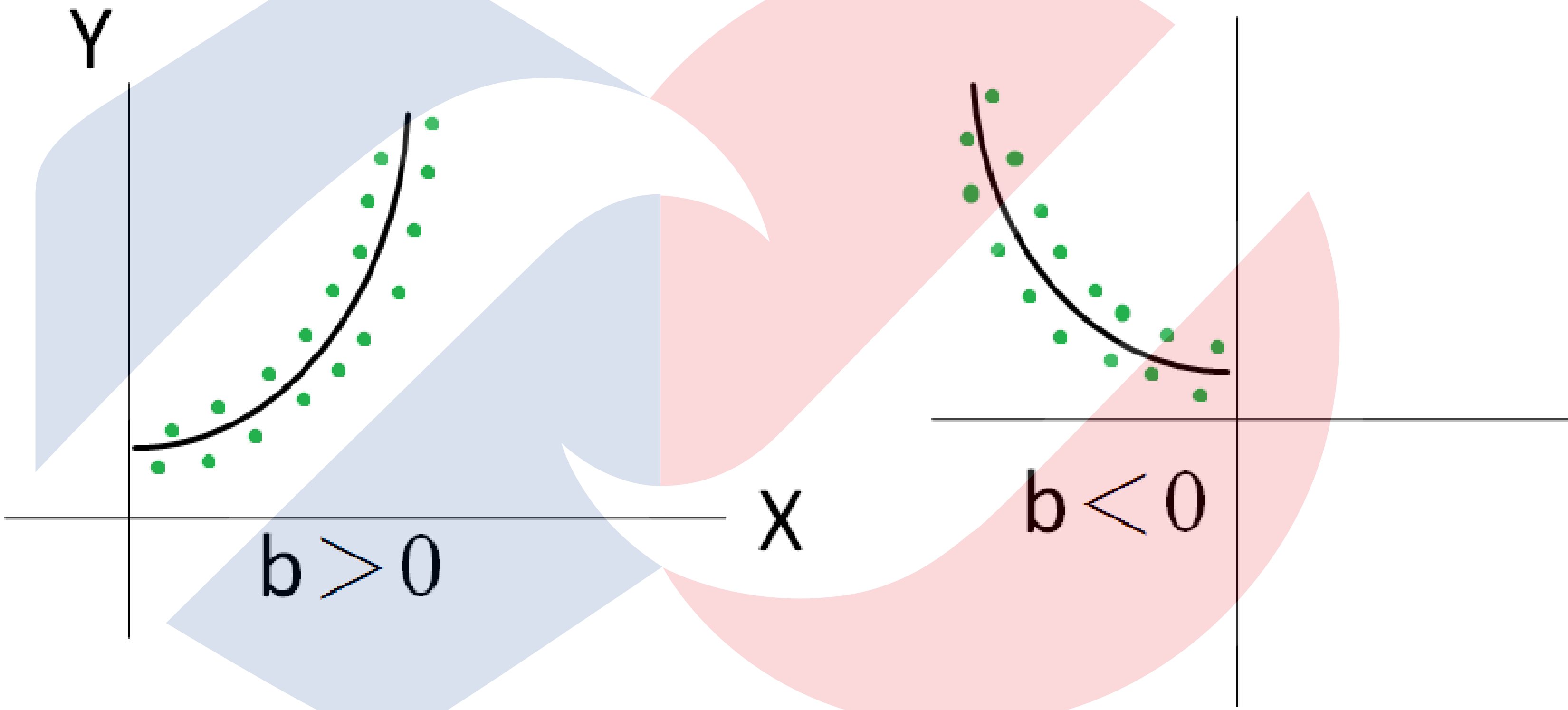


冪次函數 $Y = aX^b$

$$
\begin{aligned}
\ell nY &= \ell na + \ell nX^b \\
&= \ell na + b\ell nX
\end{aligned}
\quad \Rightarrow Y^* = a^* + bX^*
$$

令$Y^* = \ell nY, X^* = \ell nX, a^* = \ell na$

4、X,Y 之散佈圖

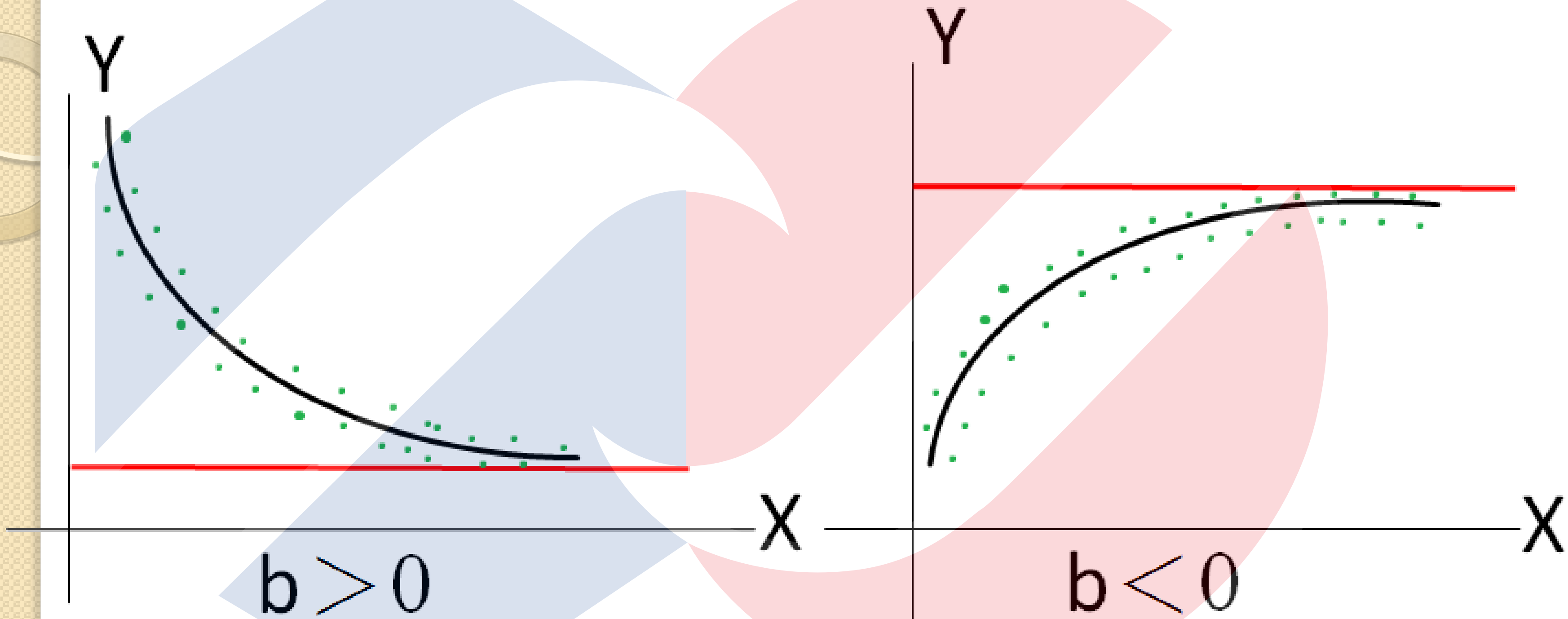


指數函數 $Y = ae^{bX}$

$$\ell nY = \ell na + bX \Rightarrow Y^* = a^* + bX$$

令$Y^* = \ell nY, a^* = \ell na$

5、X,Y 之散佈圖



指數函數 $Y = ae^{b/X}$

$$\ell nY = \ell na + \frac{b}{X} \qquad \Rightarrow Y^* = a^* + bX^*$$

令$Y^* = \ell nY, X^* = \frac{1}{X}, a^* = \ell na$

一般常用的變數變換方式

1、對數變換：$Y^* = \ell nY$ 或 $X^* = \ell nX$

2、倒數變換：$Y^* = \dfrac{1}{Y}$ 或 $X^* = \dfrac{1}{X}$

3、開方變換：$Y^* = \sqrt{Y}$ 或 $X^* = \sqrt{X}$

4、平方變換：$Y^* = Y^2$ 或 $X^* = X^2$