第九章　假設檢定

給定一例題，說明假設檢定

1.某研究機構宣稱南台科技大學日間部的學生每月平均生活消費金額(不含住宿)為5000元，為了驗證宣稱是否正確，以隨機抽樣法隨機抽取600位學生研究，令$\bar{X}$表示600位學生的平均消費金額，考慮如下的決策法則

假如4500≤ $\bar{X}$ ≤5500，則宣稱正確

反之 $\bar{X}$ >5500或 $\bar{X}$ <4500，則宣稱錯誤

另外4500及5500稱為臨界點(critical point)

2.寫成假設檢定

H_0： μ=5000

H_1： μ≠5000

H_0： 稱為虛無假設(null hypothesis)

H_1： 稱為對立假設(alternative hypothesis)

拒絕域(critical region or rejection region)

⇨拒絕 H_0 的區域，本例題之拒絕域為 $\bar{X}>5500$ 或 $\bar{X}<4500$

本假設檢定又稱為雙尾檢定

如果假設檢定寫成

H_0：μ≥5000

H_1：μ<5000

→ 左尾檢定(拒絕域在左邊)

H_0：μ≤5000

H_1：μ>5000

→ 右尾檢定(拒絕域在右邊)

3.決定合適的統計量及抽樣分配

$$\overline{X} \xrightarrow{\text{推論}} \mu$$

雖然母體分配未知，因為n=600為大樣本，從中央極限定理

$$\overline{X} \overset{\text{近似}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

如果 σ^2 未知以 s^2 估計之

4.假設檢定必須面對兩種誤差

α=P(型I誤差)

=P(拒絕 $H_0 \mid H_0$ 為真)

β=P(型II誤差)

=P(接受 $H_0 \mid H_0$ 為假)

因此本例題由以下計算可獲得α

α=P(拒絕 $H_0 \mid H_0$為真)

=P($\bar{X} > 5500 \text{ or } \bar{X} < 4500 \mid \mu = 5000$)

本例題給拒絕域求α

一般給α求拒絕域

以本例題而言,

α=P($\bar{X} > c_2$ or $\bar{X} < c_1 \mid \mu = 5000$)

必需求出 c_1, c_2

α我們稱為顯著水準(significance level)

5.結論

當 $\bar{X} > C_2$ or $\bar{X} < C_1$ ，則拒絕 H_0

反之 $C_1 \le \bar{X} \le C_2$ ，則不拒絕 H_0

假設檢定步驟

1.確認 H_0 , H_1

2.決定合適統計量及抽樣分配

3.給定顯著水準α

4.選擇檢定方法並求出拒絕域

5.必要時計算β

6.結論

常用檢定方法

1.臨界值檢定法

2.Z檢定(t檢定或 x^2檢定)

3.P值檢定

9.2母體平均數 μ 之假設檢定

- 臨界值檢定法

假設 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

給定顯著水準 α ，試利用臨界值檢定法求下列檢定

Case1. σ^2 已知

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Sol：在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\bar{X}>C_2$或$\bar{X}<C_1$

α =P(拒絕$H_0|H_0$為真)

=P($\bar{X}>C_2$ or $\bar{X}<C_1|\mu=\mu_0$)

$\frac{\alpha}{2}$ =P($\bar{X}>C_2|\mu=\mu_0$)

=P($\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$)

=P($Z>Z_{\alpha/2}$)

$$\therefore \frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_{\alpha/2}$$

$$\Rightarrow C_2 = \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P(\bar{X} < C_1 \mid \mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{C_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P(Z < -Z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \frac{C_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=-Z_{\alpha/2}$$

$$\Rightarrow C_1=\mu_0-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

結論：

拒絕H_0 if $\bar{x}>\mu_0+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$或$\bar{x}<\mu_0-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(即不拒絕H_0 if

$\mu_0-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\bar{x}\leq\mu_0+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

如果模式改為右尾檢定

H_0：$\mu \leq \mu_0$

H_1：$\mu > \mu_0$

在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\bar{X}>C_2$

α =P(拒絕$H_0|H_0$為真)

=P($\bar{X}>C_2|\mu = \mu_0$)

=P($\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$)

=P(Z>Z_α)

$$\therefore \frac{C_2 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = Z_\alpha$$

$$\Rightarrow C_2 = \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

結論：

拒絕H_0 if $\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(不拒絕H_0 if $\bar{x} \le \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

Case2. σ^2 未知，n<30(小樣本)

$$H_0：\mu = \mu_0$$

$$H_1：\mu \neq \mu_0$$

Sol：在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\bar{X}>C_2$或$\bar{X}<C_1$

α =P(拒絕$H_0|H_0$為真)

=P($\bar{X}>C_2$ or $\bar{X}<C_1|\mu = \mu_0$)

$$\frac{\alpha}{2} = P(\bar{X} > C_2 \mid \mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > \frac{C_2-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P(T > t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$\therefore \frac{C_2-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_2 = \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P(\bar{X} < C_1 \mid \mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{C_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P(T < -t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$\therefore \frac{C_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_1 = \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

結論：

拒絕H_0 if $\bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$或

$\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$

(即不拒絕H_0 if

$\mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$)

臨界值檢定法

檢定型態 \ 分配條件 / 拒絕域	常態母體			非常態母體	
	①σ^2已知	②σ^2未知, $n<30$	③σ^2未知, $n\geq30$	④σ^2已知, $n\geq30$	⑤σ^2未知, $n\geq30$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ (雙尾)	$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	同①	同③
$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ (右尾)	$\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}$	同①	同③
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ (左尾)	$\bar{x} < \mu_0 - Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} < \mu_0 - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} < \mu_0 - Z_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}$	同①	同③

- Z檢定法(t檢定法)

假設$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

給定顯著水準α，試利用Z檢定法(t檢定法)求下列檢定

Case1. σ^2已知

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Sol：由臨界值檢定法之討論

拒絕H_0 if $\bar{x}>\mu_0+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

或$\bar{x}<\mu_0-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

上述不等式可改寫為

拒絕H_0 if $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>Z_{\alpha/2}$或$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-Z_{\alpha/2}$

即拒絕H_0 if $z>Z_{\alpha/2}$或$z<-Z_{\alpha/2}$

⇨ 拒絕H_0 if $|z|>Z_{\alpha/2}$, $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Z檢定法(t檢定法)

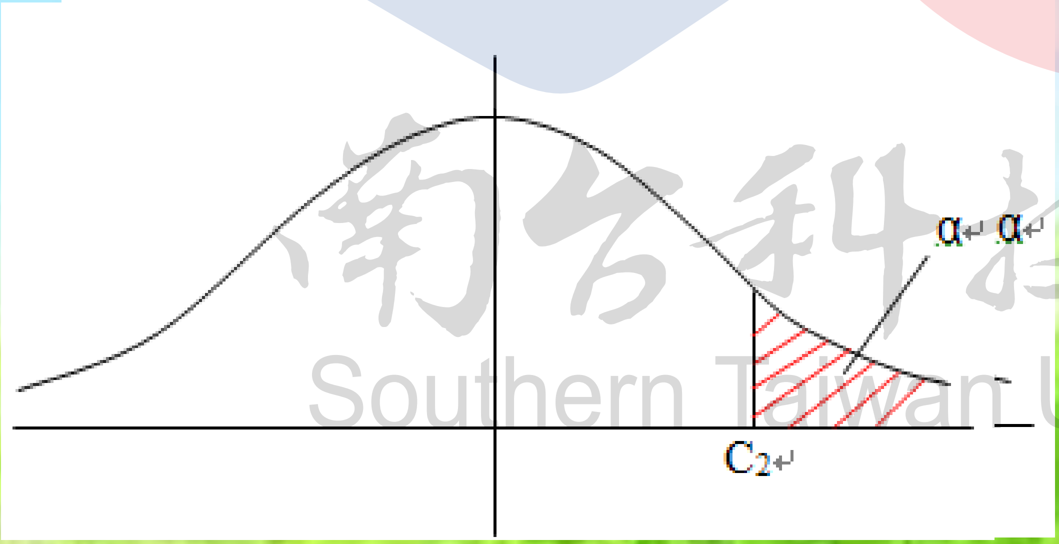
檢定型態 \ 拒絕域 \ 分配條件	常態母體			非常態母體	
	①σ^2已知	②σ^2未知，$n<30$	③σ^2未知，$n\geq30$	④σ^2已知，$n\geq30$	⑤σ^2未知，$n\geq30$
$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$ (雙尾)	$\lvert z\rvert > Z_{\alpha/2}$	$\lvert t\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert z\rvert > Z_{\alpha/2}$	同①	同③
$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$ (右尾)	$z > Z_\alpha$	$t > t_\alpha(n-1)$	$z > Z_\alpha$	同①	同③
$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$ (左尾)	$z < -Z_\alpha$ $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$t < -t_\alpha(n-1)$ $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$z < -Z_\alpha$ $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	同①	同③

- P檢定法

給定右尾檢定，顯著水準為 α

$$H_0：\mu \le \mu_0$$
$$H_1：\mu > \mu_0$$

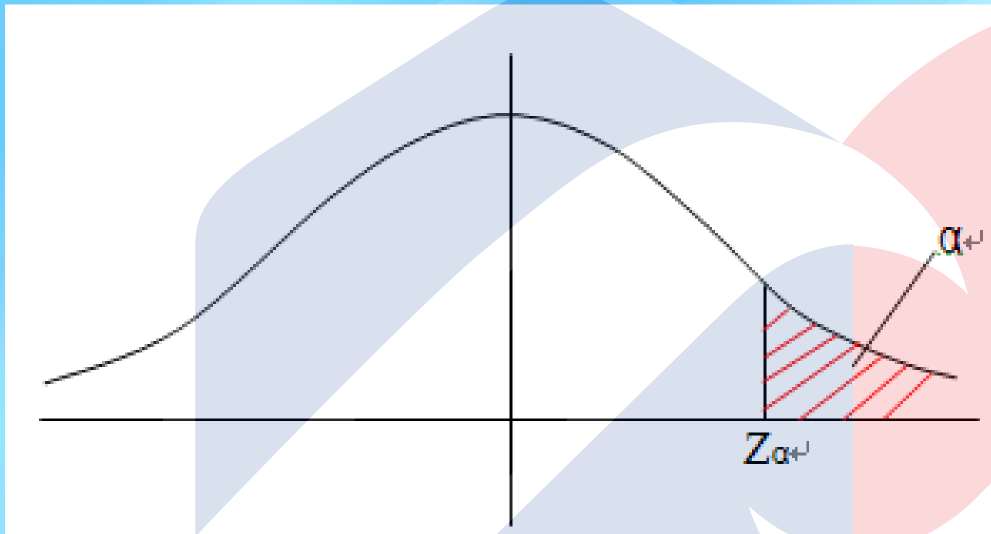
臨界值檢定法



拒絕 H_0 if

$$\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (C_2)$$

Z值檢定法

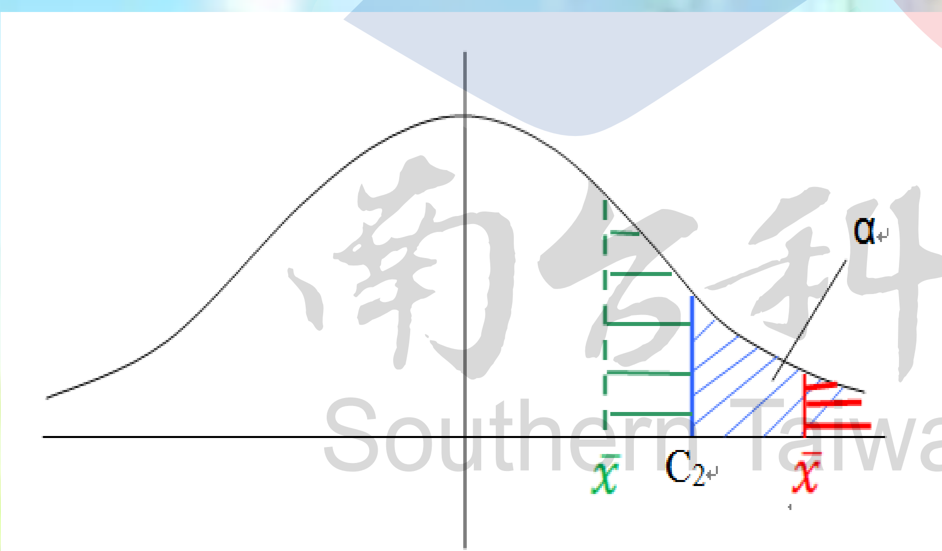


拒絕 H_0 if

$z > Z_\alpha$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

P值檢定法



$$\text{P值} = P(\bar{X} > \bar{x}) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

拒絕 H_0 if P值 $\leq \alpha$

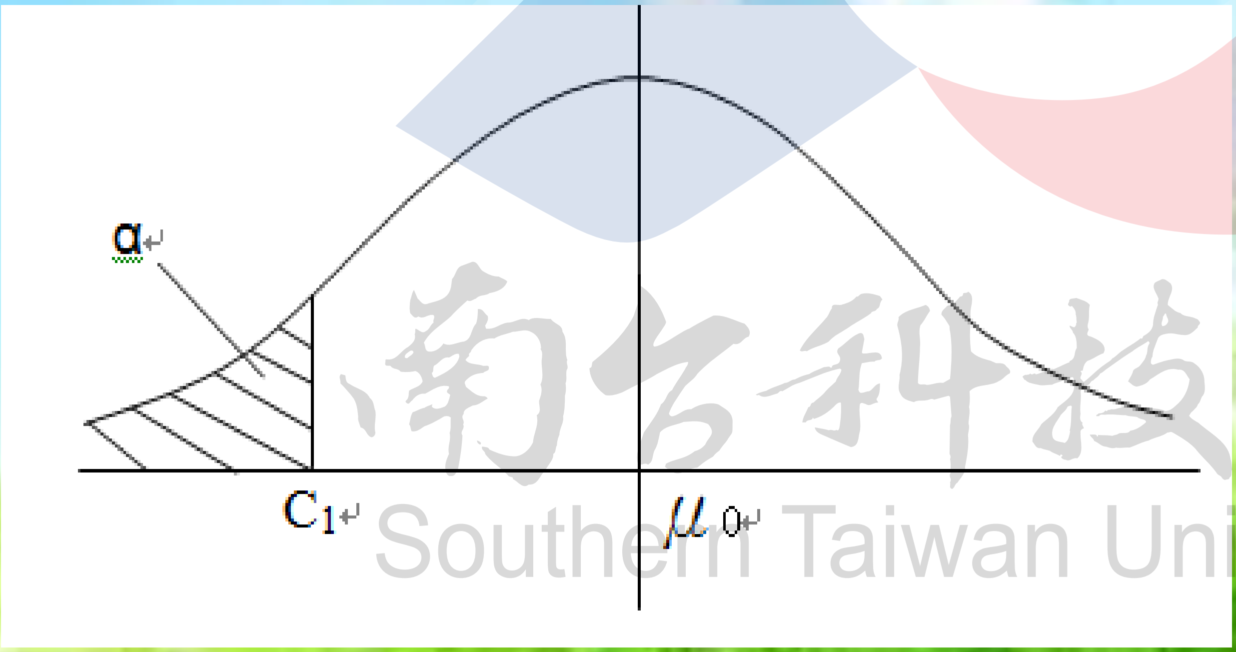
不拒絕 H_0 if P值 $> \alpha$

給定左尾檢定，顯著水準為α

$H_0：\mu \geq \mu_0$

$H_1：\mu < \mu_0$

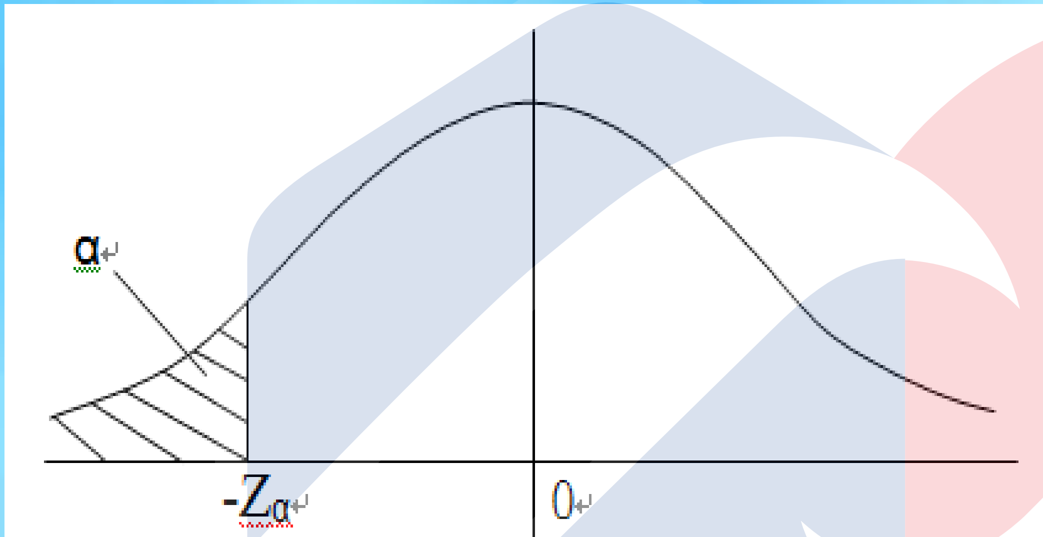
臨界值檢定法



拒絕H_0 if

$$\bar{x} < \mu_0 - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (C_1)$$

Z值檢定法

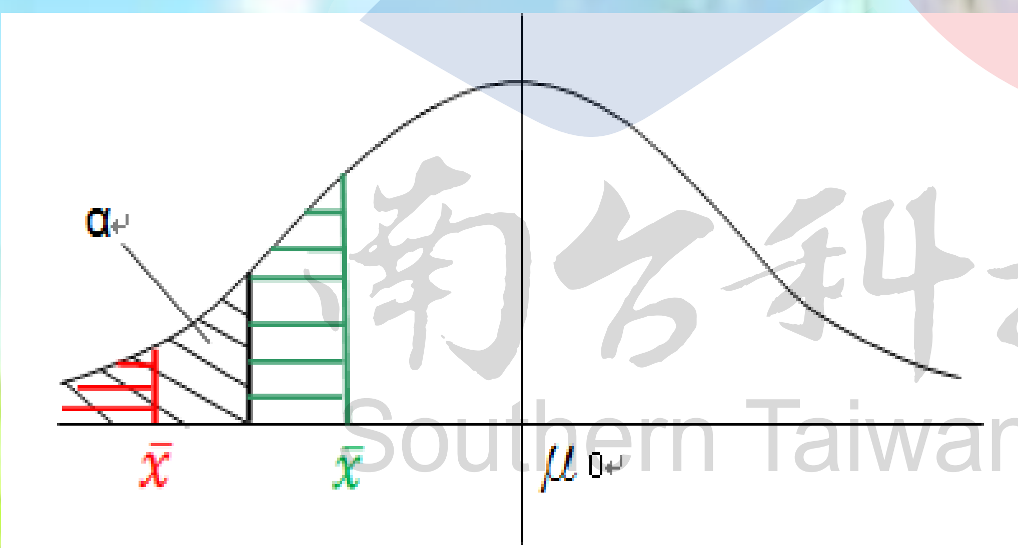


拒絕H_0 if

$z < -Z_\alpha$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

P值檢定法



$$P值 = P(\bar{X} < \bar{x})$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

拒絕H_0 if P值 $\leq \alpha$

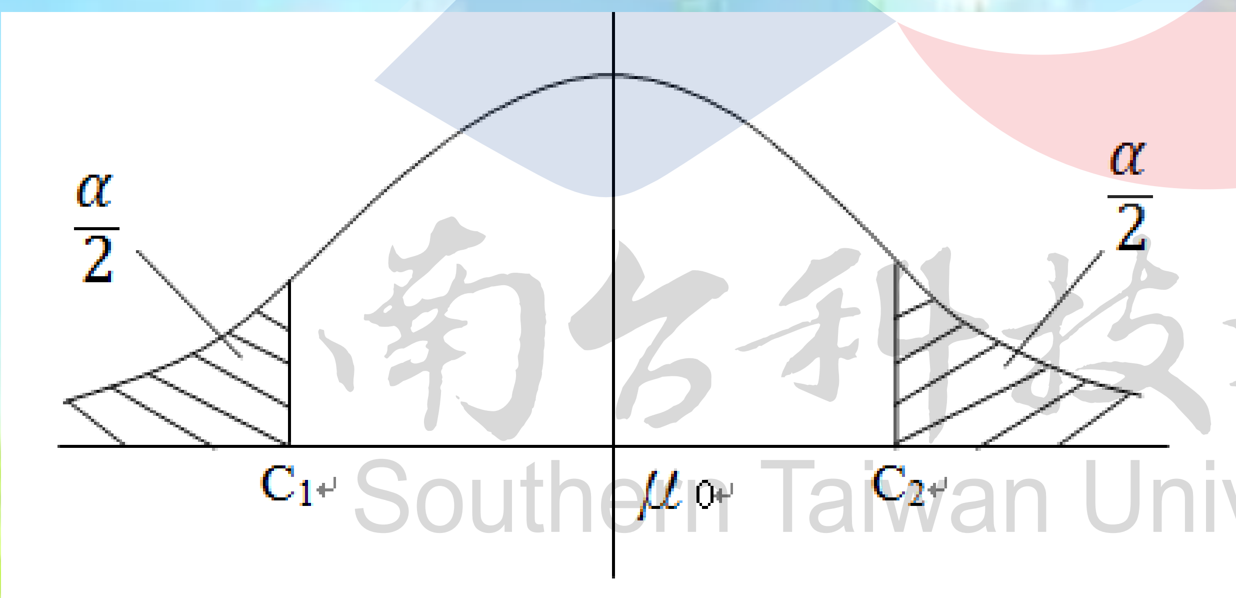
不拒絕H_0 if P值 $> \alpha$

給定雙尾檢定，顯著水準為α

$$H_0：\mu = \mu_0$$

$$H_1：\mu \neq \mu_0$$

臨界值檢定法

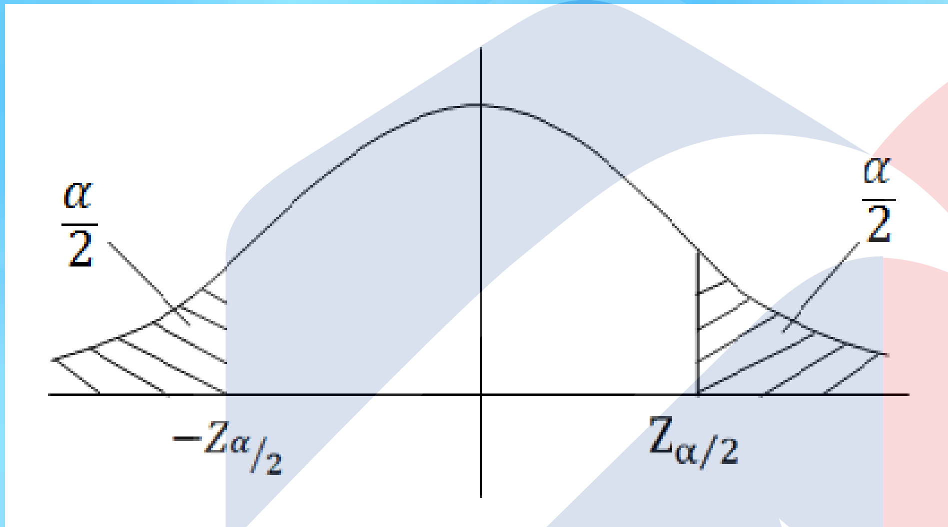


拒絕H_0 if

$$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} (C_2)$$

or $$\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} (C_1)$$

Z值檢定法

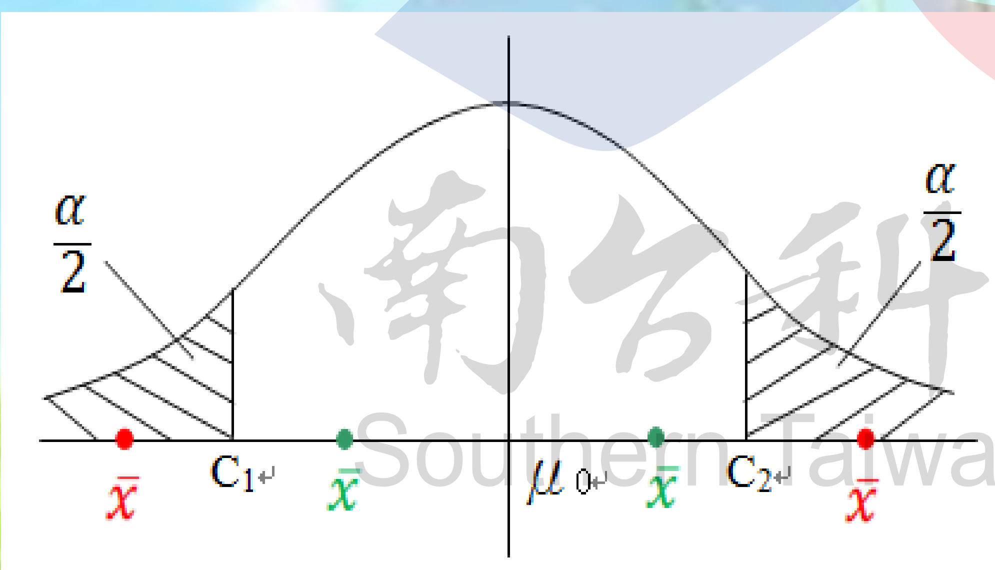


拒絕H_0 if

$|z| > Z_\alpha$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

P值檢定法



$\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow$ P值 $= 2 \times P(\bar{X} > \bar{x})$

$\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow$ P值 $= 2 \times P(\bar{X} < \bar{x})$

拒絕H_0 if P值$\leqq \alpha$

不拒絕H_0 if P值$> \alpha$

9.3母體比例P的假設檢定

已知生產一批產品N個，其不良率為P(未知)，藉由抽樣檢驗n個產品，給定顯著水準α試檢定之

$$H_0：P=P_0$$

$$H_1：P\neq P_0$$

Sol：

令 $X_i=\begin{cases}1 & \text{表示檢驗第i個產品為不良品}\\ 0 & \text{表示檢驗第i個產品為良品}\end{cases}$

且 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 表示檢驗n個產品不良品個數

則 $\hat{P}=\dfrac{Y}{n}$ 表示樣本不良率

令n≥30(大樣本)

且$\frac{n}{N}\leq 0.05$ 由中央極限定理

$Y \overset{\frown}{\text{近似}} B(n,P)$

且$\hat{P}=\frac{Y}{n} \overset{\frown}{\text{近似}} N(P,\frac{P(1-P)}{n})$

即$\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \overset{\frown}{\text{近似}} N(0,1)$

- 使用臨界值檢定法

由$\hat{P} \xrightarrow[\text{推論}]{} P$

在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\hat{p} > C_2$ or $\hat{p} < C_1$

α=P(拒絕$H_0|H_0$為真)

=P($\hat{p} > C_2$ or $\hat{p} < C_1$|P=P_0)

$$\frac{\alpha}{2}=\mathrm{P}(\hat{p} > C_2 \,|\, \mathrm{P}=P_0)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} > \frac{C_2-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx P(Z > Z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \frac{C_2-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = Z_{\alpha/2} \Rightarrow C_2=P_0+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \mathrm{P}(\hat{p} < C_1 | \mathrm{P} = P_0)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < \frac{C_1 - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx P(Z < -Z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \frac{C_1 - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = -Z_{\alpha/2} \Rightarrow C_1 = P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

決策法則：

拒絕H_0 if $\hat{p} > P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$

或 $\hat{p} < P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$

(不拒絕H_0 if

$P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} \le \hat{p} \le P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$)

- 使用Z值檢定法

上述的決策法則可改寫為

拒絕H_0 if $\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} > Z_{\alpha/2}$ 或 $\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} < -Z_{\alpha/2}$

⇨ $z > Z_{\alpha/2}$ 或 $z < -Z_{\alpha/2}$

拒絕H_0 if $|z| > Z_{\alpha/2}$ $\quad z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

(不拒絕if $|z| \leq Z_{\alpha/2}$)

- P值檢定法

當$\hat{p} > P_0$

P值$=2\times P(\hat{P} > \hat{p} | P=P_0)$

$$=2\times P\left(\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} > \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx 2\times P\left(Z > \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$\hat{p} < P_0$

P值$=2\times P(\hat{P} < \hat{p} | P=P_0)$

$$=2\times P\left(\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx 2\times P\left(Z<\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

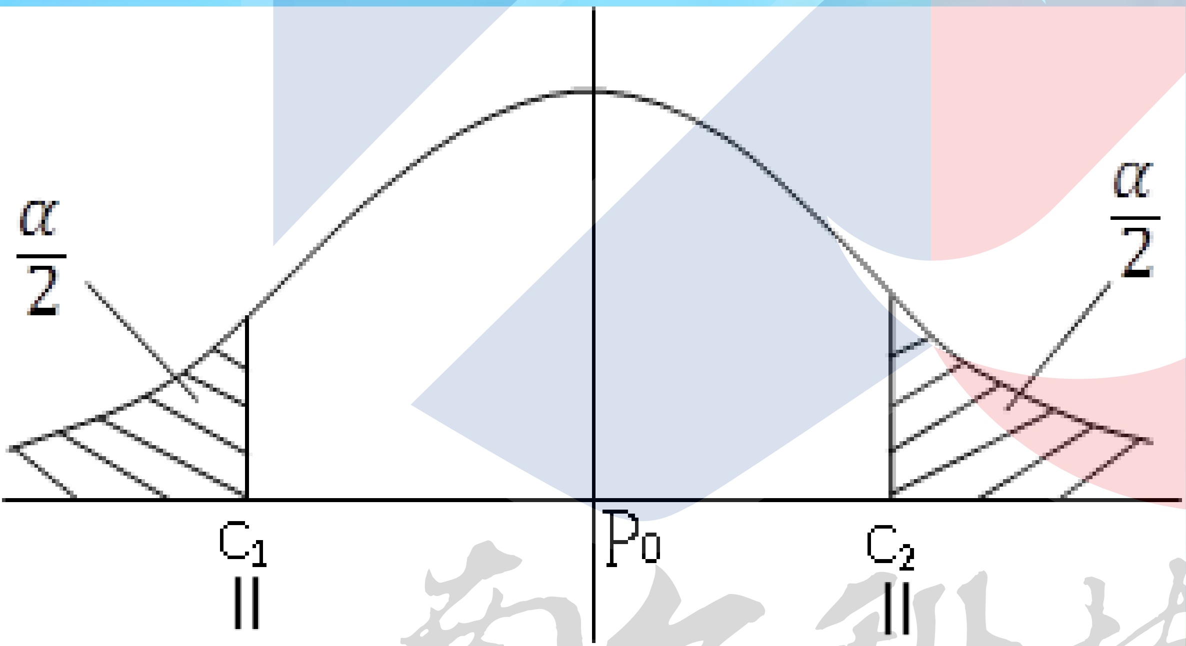
決策法則：

P值$\leq\alpha$，則拒絕H_0

P值$>\alpha$，則不拒絕H_0

- 圖形說明

1.臨界值檢定法



$$P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} \qquad P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

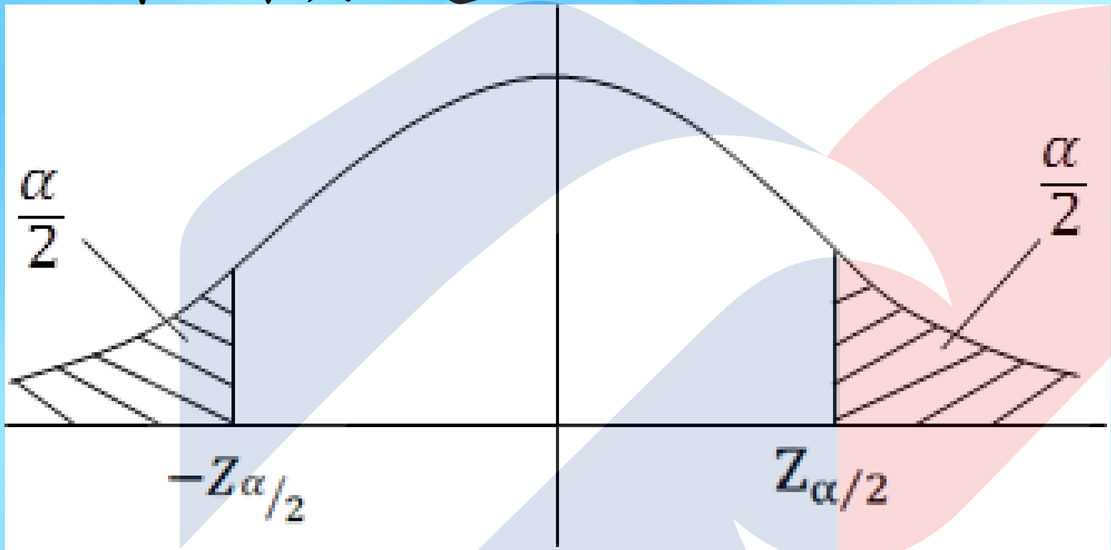
拒絕H_0 if

$$\hat{p} > P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

or

$$\hat{p} < P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

2.Z值檢定法

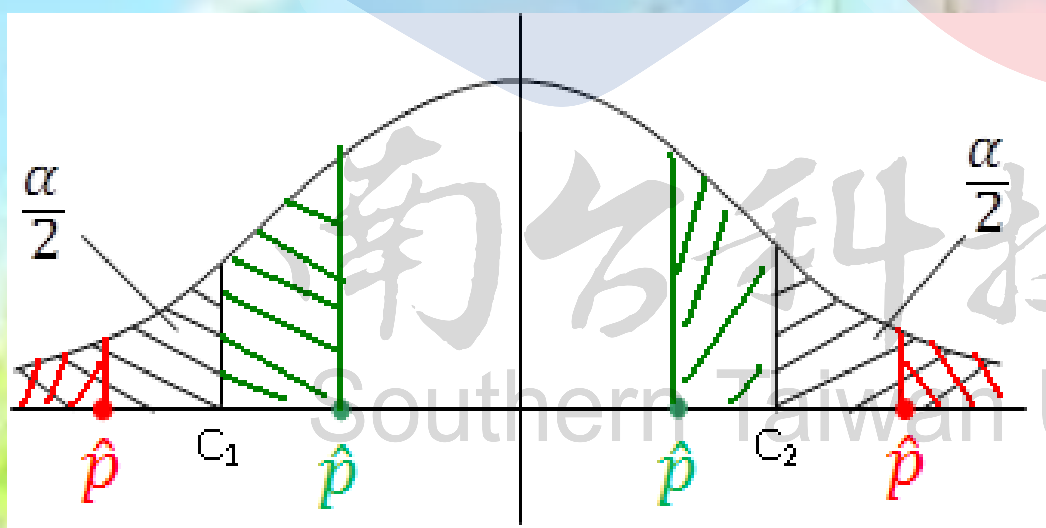


拒絕H_0 if

$|z|>Z_{\alpha/2}$

$$Z=\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

3.P值檢定法



P值≤α ⇨拒絕H_0

P值>α ⇨不拒絕H_0

檢定型態 \ 拒絕域 \ 檢定方法	臨界值檢定法	Z 值檢定法	P 值檢定法
$H_0: P = P_0$ $H_1: P \neq P_0$ (雙尾)	$\hat{P} > P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$ 或 $\hat{P} < P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$	$\lvert z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$\hat{P} > P_0$ P 值$=2\times P(\hat{P} > \hat{p})$ $\hat{P} < P_0$ P 值$=2\times P(\hat{P} < \hat{p})$
$H_0: P \leq P_0$ $H_1: P > P_0$ (右尾)	$\hat{P} > P_0 + Z_{\alpha}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$	$z > Z_{\alpha}$	P 值$=P(\hat{P} > \hat{p})$
$H_0: P \geq P_0$ $H_1: P < P_0$ (左尾)	$\hat{P} < P_0 - Z_{\alpha}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$	$z < -Z_{\alpha}$ $Z=\frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$	P 值$=P(\hat{P} < \hat{p})$ P 值$\leq\alpha$　拒絕H_0 P 值$>\alpha$　不拒絕H_0

9.4 母體變異數σ^2之假設檢定

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

假如μ及σ^2未知, 給定顯著水準α

求下列檢定

$H_0：\sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1：\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

- 臨界值檢定法

$$s^2 \xrightarrow{\text{推論}} \sigma^2$$

已知 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim x^2(n-1)$

在 H_0 為真之下

拒絕 H_0 if $s^2 > C_2$ or $s^2 < C_1$

α=P(拒絕 $H_0|H_0$ 為真)

$=P(s^2 > C_2 \text{ or } s^2 < C_1|\sigma^2 = \sigma_0{}^2)$

$$\frac{\alpha}{2} = P(s^2 > C_2 | \sigma^2 = {\sigma_0}^2)$$

$$= P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)C_2}{{\sigma_0}^2}\right)$$

$$= P(X^2 > x^2{}_{\alpha/2}(n-1)) \quad X^2 \sim x^2(n-1)$$

$$\therefore \frac{(n-1)C_2}{{\sigma_0}^2} = x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{{\sigma_0}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

$$\frac{\alpha}{2}=\mathrm{P}(s^2 < C_1|\sigma^2=\sigma_0{}^2)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<\frac{(n-1)C_1}{\sigma_0{}^2}\right)$$

$$= P(X^2 < x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1))$$

$$\therefore \frac{(n-1)C_1}{\sigma_0{}^2} = x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

決策法則：

拒絕H_0 if $s^2 > \dfrac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$

或 $s^2 < \dfrac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$

(不拒絕H_0 if

$\dfrac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1} \leq s^2 \leq \dfrac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$)

- x^2值檢定法

由上述的討論，可以寫為

拒絕H_0 if $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} > x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$

or $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} < x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)$

即拒絕H_0 if $x^2 > x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$

or $x^2 < x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)$ $\quad x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}$

不拒絕H_0 if

$$x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1) \le x^2 \le x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$$

- P值檢定法

當$s^2 > {\sigma_0}^2$

P值$=2\times P(S^2 > s^2 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2)$

$$=2\times P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}\right)$$

$$=2\times P\left(x^2 > \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}\right)$$

當$s^2 < \sigma_0{}^2$

$$P值=2\times P(S^2 < s^2 | \sigma^2 = \sigma_0{}^2)$$

$$=2\times P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2})$$

$$=2\times P(x^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2})$$

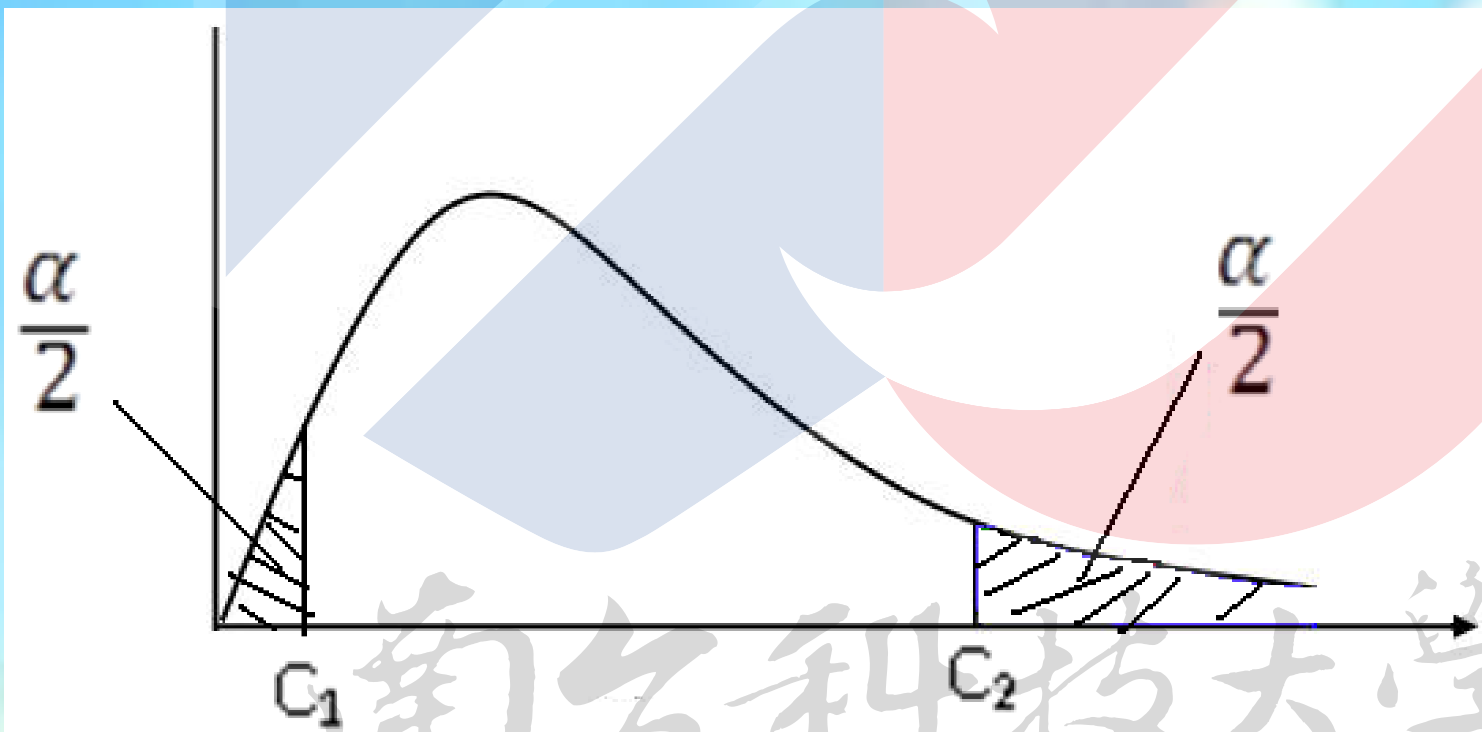
決策法則：

拒絕H_0 if P值≤α

不拒絕H_0 if P值>α

- 圖形說明

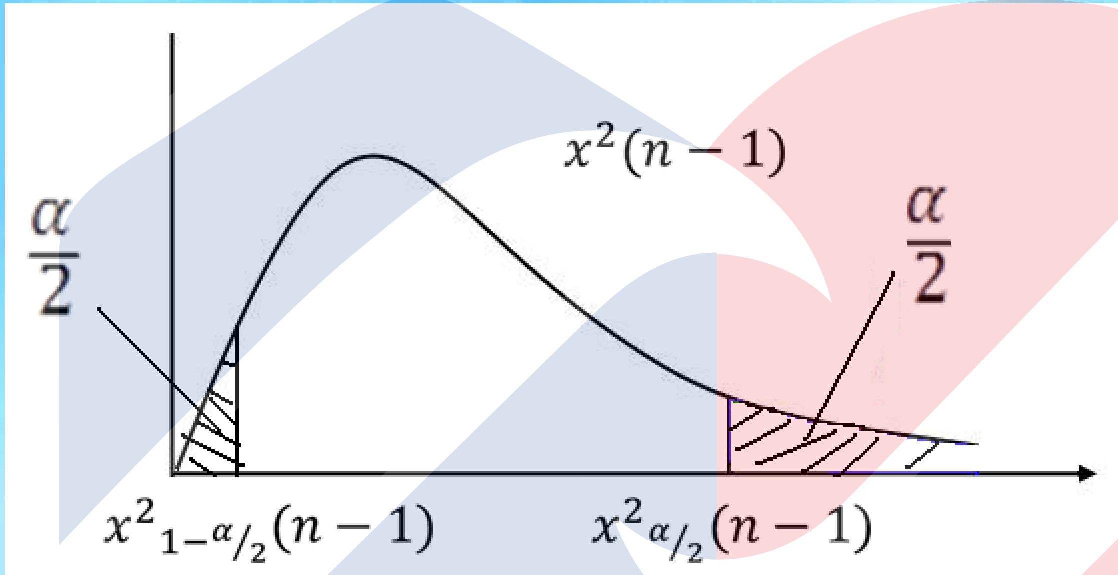
1.臨界值檢定法



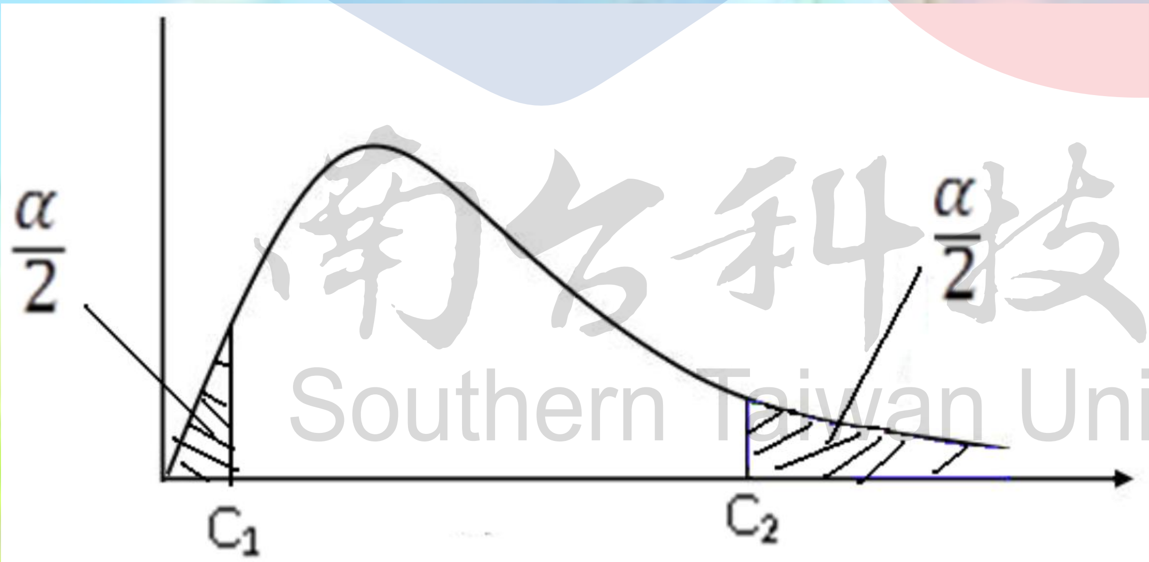
$$C_1 = \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

$$C_2 = \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

2. x^2值檢定法



3.P值檢定法



檢定型態＼檢定方法（拒絕域）	臨界值檢定法	x^2值檢定法	P 值檢定法
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ （雙尾）	$S^2 > \frac{\sigma_0^2 x^2_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$ 或 $S^2 < \frac{\sigma_0^2 x^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$	$x^2 > x^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $x^2 < x^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	$s^2 > \sigma_0^2$ P 值$=2\times P(S^2 > s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$ $s^2 < \sigma_0^2$ P 值$=2\times P(S^2 < s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$
$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ （右尾）	$S^2 > \frac{\sigma_0^2 x^2_{\alpha}(n-1)}{n-1}$	$x^2 > x^2_{\alpha}(n-1)$	P 值$=2\times P(S^2 > s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$
$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ （左尾）	$S^2 < \frac{\sigma_0^2 x^2_{1-\alpha}(n-1)}{n-1}$	$x^2 < x^2_{1-\alpha}(n-1)$ $x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	P 值$=2\times P(S^2 < s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$ 拒絕H_0 if P 值$\leq \alpha$ 不拒絕H_0 if P 值$> \alpha$