

CHAPTER 5 導數的應用

5.1 遞增函數與遞減函數

習題 5.1

5.2 相對極值

習題 5.2

5.3 凹性與反曲點

習題 5.3

5.4 繪 圖

習題 5.4

5.5 最佳化

習題 5.5

診斷測驗

5.1

遞增函數與遞減函數

如果一個函數的圖形由左到右是逐漸上升，稱該函數為遞增函數（如圖 5.1）；如果函數圖由左到右是逐漸下降，稱該函數為遞減函數（如圖 5.2）。

Southern Taiwan University

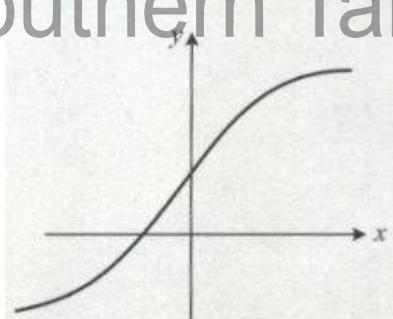


圖 5.1 遞增函數

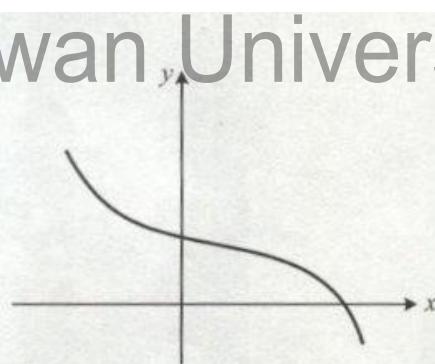


圖 5.2 遞減函數

我們正式定義如下。

定義 5.1

若 $f(x)$ 為定義在區間 (a, b) 的函數，且 x_1, x_2 為區間中任意兩個數。

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) > f(x_1)$ ；我們稱 $f(x)$ 在該區間遞增(increasing)。

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) < f(x_1)$ ；我們稱 $f(x)$ 在該區間遞減(decreasing)。

我們說 $f(x)$ 在點 c 遷增係指有在一個區間 (a, b) 包含 c 使得 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上是遞減。同理 $f(x)$ 在點 c 遷減係指存在一個區間 (a, b) 包含 c 使得 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上是遞減。若 $f(x)$ 在某一點的導數是正數，表示函數圖形在該點的切線斜率為正的，因此函數是遞增的；若在某一點的導數為負數，那麼函數圖形在該點的切線斜率為負的，因此函數是遞減的（如圖 5.3）

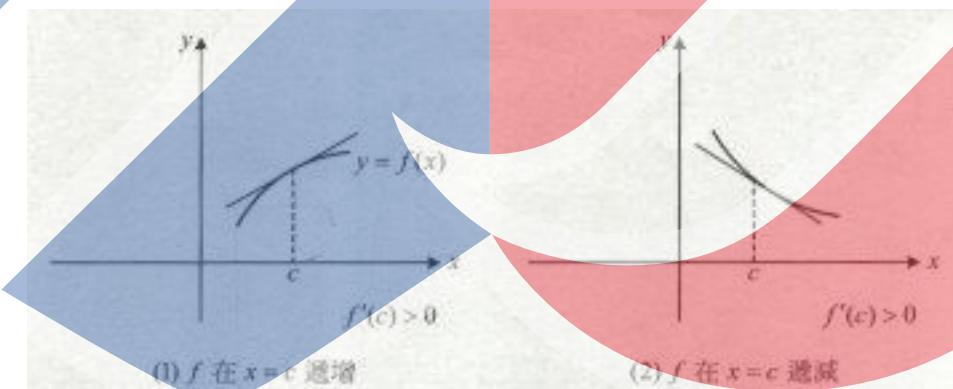


圖 5.3 圖形的遞增或遞減與其斜率正負的對應關係

因此由下面的定理，可以利用導數的正負值判斷函數是遞增或遞減。

定理 5.1

- (1) 若對於每一個開區間 (a, b) 中任意 x 值， $f'(x) > 0$ ，則 f 在 (a, b) 上為遞增。
- (2) 若對於每一個開區間 (a, b) 中任意 x 值， $f'(x) < 0$ ，則 f 在 (a, b) 上為遞減。
- (3) 若對於每一個開區間 (a, b) 中任意 x 值， $f'(x) = 0$ ，則 f 在 (a, b) 上為常數。

例 1

若 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 1$ ，試問在哪些區間 f 為遞增？在哪些區間 f 為遞減？

例 2

試求 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在哪些區間是遞增？在哪些區間是遞減？



隨堂練習

試求 $f(x) = x^2$ 在哪些區間遞增？在哪些區間遞減？

南方科技大學
Southern Taiwan University