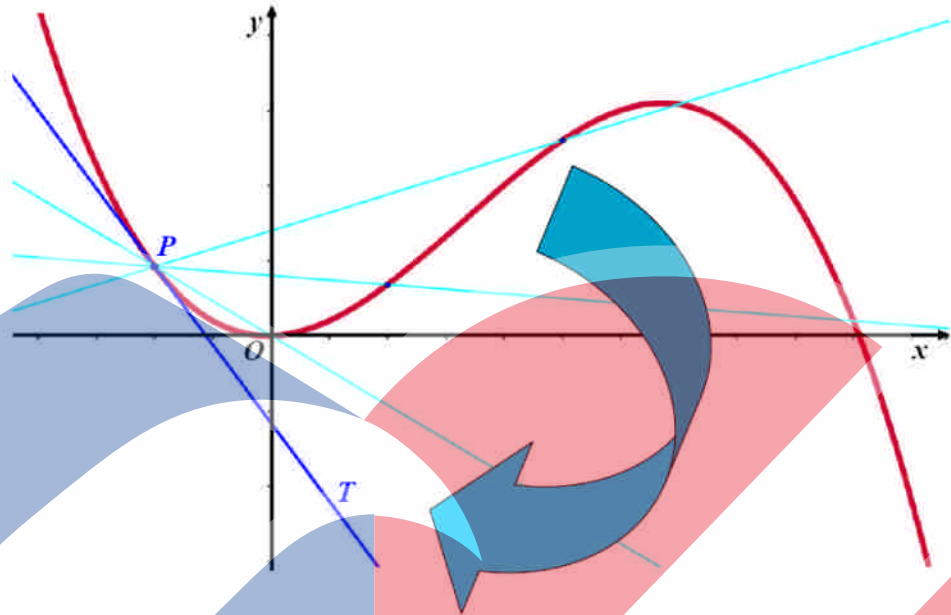


2-1 導數的定義

設 $I = (a, b)$ 為一開區間， f 為定義在 I 上的實數值函數，若 $P(x_0, f(x_0))$ 與 $Q(x, f(x))$ 為函數 f 之圖形上的相異兩點，則連接 P 與 Q 兩點之割線斜率為 $m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



若令 x 逼近 x_0 ，則 Q 點會沿著 f 的圖形逼近 P 點，在此同時通過 P 與 Q 兩點的割線，也相同會逼近切線 T ，於是我們知道當函數 f 之圖形在點 $P(x_0, f(x_0))$ 之切線 T 存在，則當 x 逼近 x_0 時，割線斜率 m_{PQ} 將逼近切線 T 的斜率 m_T ，所以我們可得

$$m_T = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

定義：導數(Derivative)

(1) 設 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為一函數且 $x_0 \in (a, b)$ ，若極限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，則稱此極值為函數 $f(x)$ 在 x_0 點的導數且記為 $f'(x_0)$ ，即 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

另一方面，若令 $x = h + x_0$ ，則上式又可改寫為

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(2) 若函數 f 在 x_0 點的導數存在，則我們稱函數 f 在 x_0 點可微(Differentiable)。反之，則函數 f 在 x_0 點不可微。

(3) 若函數 f 在開區間 (a, b) 上的每一點都可微，則我們稱函數 f 為可微函數且記為 $f'(x)$ ，既對 $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

註 1：一般函數 $f(x)$ 在點 x_0 的導數符號，可用下列任一種符號表示

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = D_x f(x) \Big|_{x=x_0} = f'(x) \Big|_{x=x_0}$$

註 2：若函數 $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 點的切線斜率 $m_T = f'(x_0)$ 存在，則利用直線之點斜式知切線方程式為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

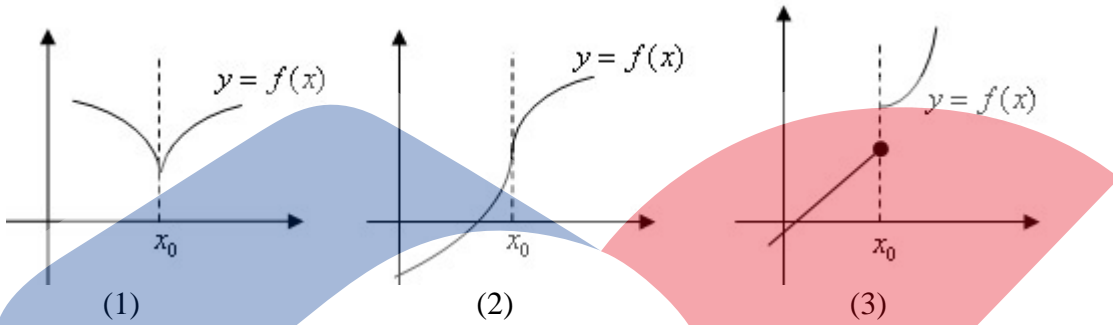
例題 1. 設 $f(x) = x^2$ ，求 (a) $f'(1)$ (b) $f'(x)$

練習：設 $f(x) = 3x^2 + 1$ ，求 (a) $f'(2)$ (b) $f'(x)$

例題 2. 若函數 $f(x) = |x|$ ，討論 $f'(0)$ 是否存在。

練習：若函數 $f(x) = |x-1|$ ，求 $f'(0)$ ， $f'(2)$ 及 $f'(1)$ 。

我們可注意到函數 $f(x)$ 在點 $x = x_0$ 若不可微分則極限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在，一般我們所遇到的不可微分之點有三類 (1) 尖點 (含折角) (2) 具有垂直切線的點 (3) 不連續點。



例題 3. 試證 $f(x) = x^{1/3}$ 在點 $x = 0$ 不可微分。

定理：若函數 $f(x)$ 在 c 點可微分，則 $f(x)$ 在 c 點連續。

證：我們只需證明 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 或 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] = 0$ 即可，因為

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[(x - c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= 0 \cdot f'(c) = 0 \end{aligned}$$

故得證 $f(x)$ 在 c 點連續。

註：定理的等價命題知：若 $f(x)$ 在 c 點不連續，則 $f(x)$ 在 c 點不可微。

例題 4. 設函數 f 定義如下：

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & x < 1 \\ x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

試證 $f(x)$ 在點 $x = 1$ 不可微分。

練習：若 $f(x) = \begin{cases} -x + 4, & x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$ ，試證 $f(x)$ 在點 $x = 2$ 不可微分。

例題 5. 求 $f(x) = x^2$ 在 $(2, 4)$ 點的切線方程式？

練習：求 $f(x) = 2x^2 - 3$ 在 $(2, 5)$ 點的切線方程式？

