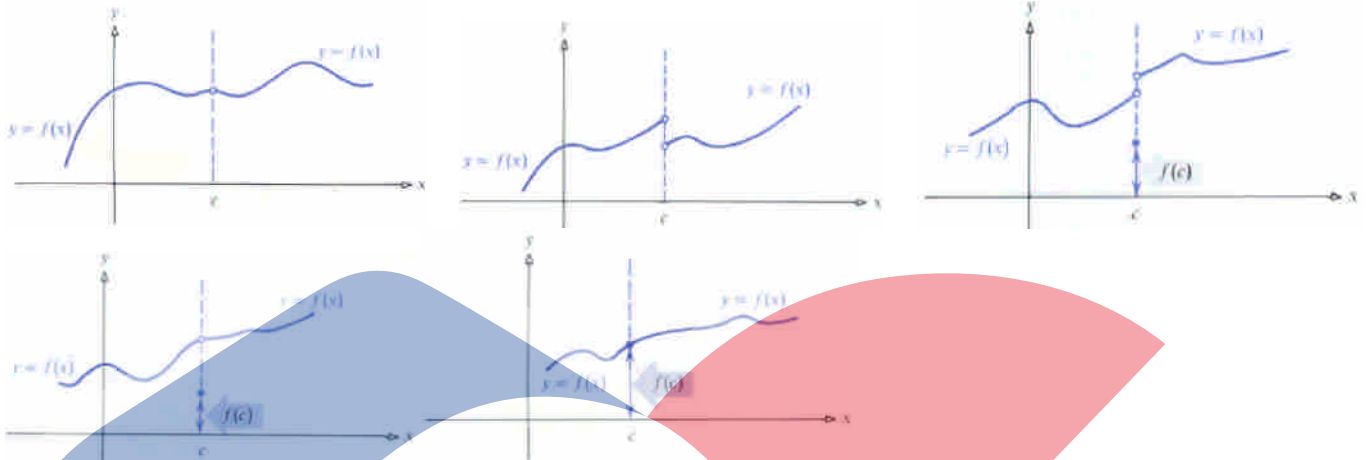


## 1-5 連續函數 (continuous functions)

定義：設  $f(x)$  在  $x=a$  的附近有定義且包括  $a$ 。則

$$f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 連續} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

而所謂連續函數，即是在其定義域內每一點均連續的函數。



例題 1：說明函數  $f(x) = 3x^3 - 5x + 4$  在  $x=1$  處為連續。

例題 2：討論函數  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$  在何點為連續。

定理：

- (1) 多項式函數在每一點都是連續的。
- (2) 有理函數  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  除了在分母  $Q(x) = 0$  的  $x$  之外都連續。
- (3) 指數函數、對數函數，在它們的定義域均連續。
- (4) 給定兩個連續函數  $f$  和  $g$  之後，把它們相加、相減、相乘、相除之後，所得到的新函數

$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g} (g \neq 0)$  也都是連續函數。

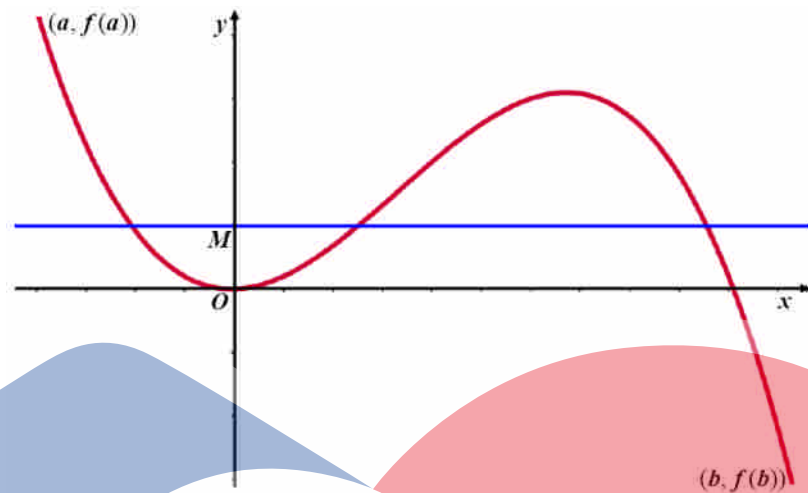
例題 3：設  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ ，請問  $f(x)$  是否是連續函數？

例題 4：設  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}, & x > 3 \\ mx + 1, & x \leq 3 \end{cases}$ ，求  $m$  的值使得  $f$  為一連續函數。

課堂練習：設  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ mx + 1, & x \leq 1 \end{cases}$ ，求  $m$  的值使得  $f$  為一連續函數。

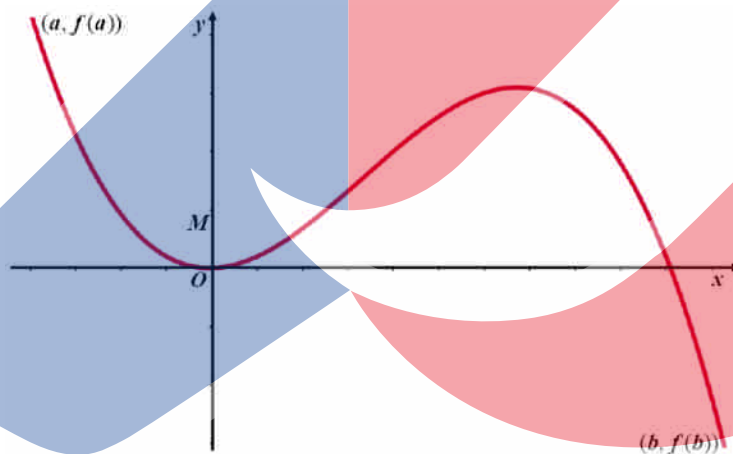
定理 1.10 中間值定理 (The intermediate value theorem)

假設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上連續的，且  $M$  是  $f(a)$  和  $f(b)$  之間的任一數，則在  $[a, b]$  中至少存在一數  $c$ ，使得  $f(c) = M$ 。



定理 1.11 勘根定理 (Locating root theorem, Bolzano's theorem)

假設  $f(x)$  在  $[a, b]$  是連續的，且  $f(a)$  和  $f(b)$  異號，即  $f(a) \cdot f(b) < 0$ 。則至少有一個  $c \in (a, b)$  使得  $f(c) = 0$ 。即方程式  $f(x) = 0$  至少有一個根在  $(a, b)$ 。



例題 5：求證  $x^3 + x - 1 = 0$  至少有一實根。

課堂練習：求證  $3x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$  至少有一實根。

南方科技大學  
Southern Taiwan University