

## 1-1 極限定義

極限 (limit) 的概念是微積分的基礎。

假設有一輛火車沿著一直線運動，它和原點的距離以  $s$  表示，假設距離  $s$  和時間  $t$  的關係為  $s = f(t) = 4t^2, t \geq 0$ 。問這輛火車在時間  $t = 2$  的瞬時速度 (instantaneous velocity) 為何？

在任意時間  $t$  和  $t = 2$  之間的平均速度由下式給出：

$$\frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{4t^2 - 16}{t - 2} = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = g(t)$$

求該火車在時間  $t = 2$  的瞬時速度，直覺上的想法就是用這個平均速度  $g(t)$  來逼近瞬時速度。當我們讓  $t$  任意的接近 2 時，如果  $g(t)$  會任意的接近一個固定的數  $L$ ，則我們說  $L$  就是這輛火車在時間  $t = 2$  這一瞬間的速度，而這個  $L$  就是  $g(t)$  在  $t$  趨近於 2 時的極限 (limit)，用符號

$$\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = L$$

來表示。

註：不能直接把  $t = 2$  代入  $g(t)$ ，因  $g(2)$  根本沒有定義。我們所考慮的只是  $t$  很接近 2 或者說  $t$  在 2 點的附近  $g(t)$  的性質。我們在這裡所講的很接近、附近、逼近及趨近於都是直觀上的意義，讀者可以直接由文字意義理解。

下面的表列出一些時間區間的平均速度，即一些  $g(t)$  在  $t \neq 2$  的函數值：

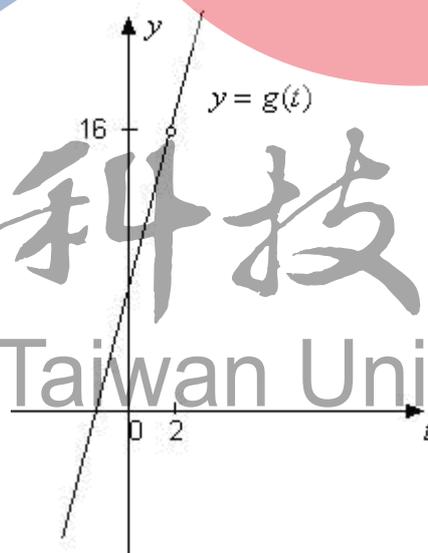
$t$	1.5	1.99	1.9999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2.0001	2.001	2.1
$g(t)$				$\rightarrow ? \leftarrow$			

當  $t$  很接近 2 時，其對應的函數值  $g(t)$  會很接近 16。

上面這個事實，我們說在  $t$  趨近於 2 時， $g(t)$  的極限值為 16，或是簡單講說  $g(t)$  在  $t = 2$  的極限值為 16，用下列符號表示：

$$\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16 \quad \text{或} \quad g(t) \rightarrow 16 \text{ 當 } t \rightarrow 2$$

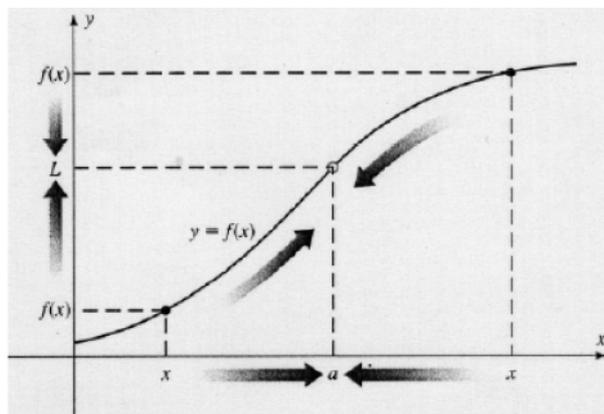
亦可從下面  $g(t)$  的函數圖形來理解：



下面我們給出極限 (limit) 直覺上的定義：

定義：若當  $x$  趨近於  $a$  時且  $x \neq a$ ， $f(x)$  會趨近於一固定值  $L$ ，則稱  $f(x)$  在  $x = a$  的極限值為  $L$ ，以下列符號表示：

$$\text{“} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{” 或 “} f(x) \rightarrow L \text{ 當 } x \rightarrow a \text{”}$$



若  $L$  不存在，我們說  $f(x)$  在  $x=a$  的極限不存在。

例題：

(1) 若  $f(x) = x + 2$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

(2) 若  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

(3) 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

註：由上面的定義可知， $f(x)$  在  $x=a$  的極限值，和  $f(x)$  在  $x=a$  的函數值是沒有關係的。

例題 1：求  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 =$

練習 1：求  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 + x - 5) =$

練習 2：求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{x - 2} =$

例題 2：設  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$  求  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

練習：設  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; x < 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$  求  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

南方科技大學  
Southern Taiwan University