

1-1 極限定義

極限 (limit) 的概念是微積分的基礎。

假設有一輛火車沿著一直線運動，它和原點的距離以 s 表示，假設距離 s 和時間 t 的關係為 $s = f(t) = 4t^2, t \geq 0$ 。問這輛火車在時間 $t = 2$ 的瞬時速度 (instantaneous velocity) 為何？

在任意時間 t 和 $t = 2$ 之間的平均速度由下式給出：

$$\frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{4t^2 - 16}{t - 2} = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = g(t)$$

求該火車在時間 $t = 2$ 的瞬時速度，直覺上的想法就是用這個平均速度 $g(t)$ 來逼近瞬時速度。當我們讓 t 任意的接近 2 時，如果 $g(t)$ 會任意的接近一個固定的數 L ，則我們說 L 就是這輛火車在時間 $t = 2$ 這一瞬間的速度，而這個 L 就是 $g(t)$ 在 t 趨近於 2 時的極限 (limit)，用符號

$$\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = L$$

來表示。

註：不能直接把 $t = 2$ 代入 $g(t)$ ，因 $g(2)$ 根本沒有定義。我們所考慮的只是 t 很接近 2 或者說 t 在 2 點的附近 $g(t)$ 的性質。我們在這裡所講的很接近、附近、逼近及趨近於都是直觀上的意義，讀者可以直接由文字意義理解。

下面的表列出一些時間區間的平均速度，即一些 $g(t)$ 在 $t \neq 2$ 的函數值：

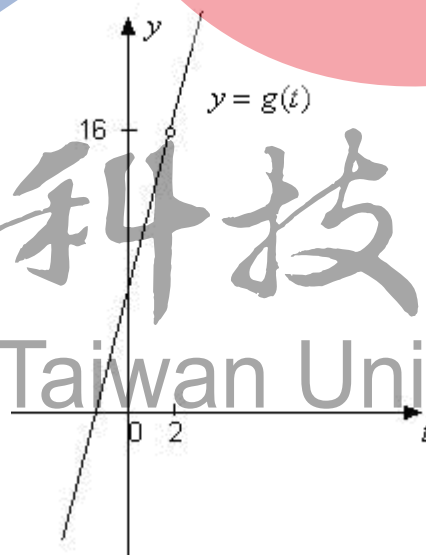
t	1.5	1.99	1.9999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2.0001	2.001	2.1
$g(t)$				$\rightarrow ? \leftarrow$			

當 t 很接近 2 時，其對應的函數值 $g(t)$ 會很接近 16。

上面這個事實，我們說在 t 趨近於 2 時， $g(t)$ 的極限值為 16，或是簡單講說 $g(t)$ 在 $t = 2$ 的極限值為 16，用下列符號表示：

$$\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16 \quad \text{或} \quad g(t) \rightarrow 16 \text{ 當 } t \rightarrow 2$$

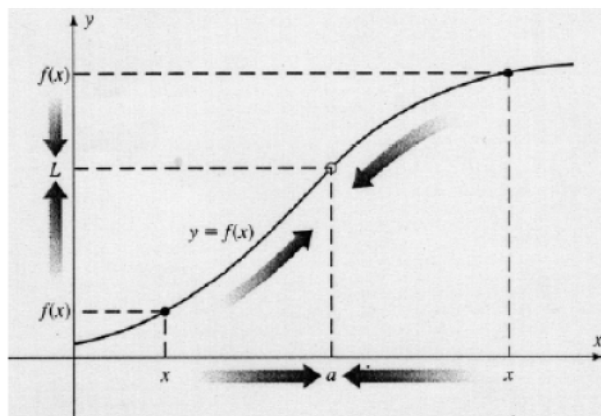
亦可從下面 $g(t)$ 的函數圖形來理解：



下面我們給出極限 (limit) 直覺上的定義：

定義：若當 x 趨近於 a 時且 $x \neq a$ ， $f(x)$ 會趨近於一固定值 L ，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限值為 L ，以下列符號表示：

$$\text{“} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{” 或 “} f(x) \rightarrow L \text{ 當 } x \rightarrow a \text{”}$$



若 L 不存在，我們說 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限不存在。

例題：

(1) 若 $f(x) = x + 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

(2) 若 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

(3) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

註：由上面的定義可知， $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限值，和 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值是沒有關係的。

例題 1：求 $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 =$

練習 1：求 $\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 + x - 5) =$

練習 2：求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x-2} =$

例題 2：設 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ x+1, & x > 3 \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

練習：設 $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 2 \\ 2x-1 & ; x > 2 \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

南方科技大學
Southern Taiwan University