(D) 定積分

前一節面積的求法步驟之假設條件為函數 $y = f(x)$ 必須為非負，若將此一條件取消，重新定義即為定積分。

定義 4.3

假設 $y = f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為一連續函數，$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n \mid a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ 為區間 $[a,b]$ 的一等 n 分割，$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ 為每一區間的長度，且 c_k 為區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 內的一點，$k = 1, 2, \cdots, n$。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ 存在，則稱此極限值為函數 f 在區間 $[a,b]$ 的定積分(definite integral)，記為 $\int_a^b f(x)dx$。

註 1：$\int$ 稱為積分符號(integral sign)，$f(x)$ 為被積分函數(integrand)，a 為積分下限(lower limit)，b 為積分上限(upper limit)，x 為一虛擬變數(dummy variable)。

註 2：這種分割、取點、求和、求極限的四步驟，不但可用來算面積，只要變數與函數解釋得當，也可用來求距離、曲線長、體積、質量、質量重心、功等等。積分這個簡單的觀念一樣統攝了許許多多的現象。

註 3：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ 存在，則稱函數 f 在區間 $[a,b]$ 為可積分(integrable)。

例題 1. 試將 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{i}{n}\right)^4 + 1\right]$ 化為定積分。

解：

隨堂練習：試將 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{3i}{n}+1}$ 化為定積分。

例題 2. 試計算 $\int_0^1 (2x-3)dx$。

解：

隨堂練習：試計算 $\int_0^1 (3x+1)dx$。

定理 4.4：

若 f 在區間$[a,b]$為可積分函數，則

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

定積分的性質：

若 f ，g 在區間$[a,b]$為可積分函數，則

1. $\int_a^b kdx = k(b-a)$ ，k 為一常數

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ ，k 為一常數

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ，$a \le c \le b$

5. 若 $f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$ ，則 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

6. 若 $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ ，則 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

例題 3. 已知 $\int_0^1 1dx = 1$ 且 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ，試計算 $\int_0^1 (3-5x^2)dx$ 。

解：

隨堂練習：已知 $\int_0^1 1dx = 1$ 且 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ，試計算 $\int_0^1 (6x^2+8)dx$ 。

例題 4. 假設 $\int_2^8 f(x)dx = 10$ 且 $\int_0^{10} f(x)dx = 3$ ，試求 $\int_0^2 f(x)dx$ 。

解：

隨堂練習：若 f 在$[0,7]$為連續，且 $\int_0^5 f(x)dx = 10$ 且 $\int_5^7 f(x)dx = 3$ ，求 $\int_0^7 f(x)dx$

由定積分的定義，可以發現定積分與前一節所求的面積方式有其相當密切的的關係，因此，可以獲得定積分的幾何關係，並藉此求解定積分值。定積分的幾何意義有下列三種關係：

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 為非負連續函數，則 $\int_a^b f(x)dx$ 等於函數 f、x 軸、$x=a$ 與 $x=b$ 所圍區域 R 的面積。

(2) 若 f 在 $[a,b]$ 為非正連續函數，則 $\int_a^b f(x)dx$ 等於 $(-1)\times$ 函數 f、x 軸、$x=a$ 與 $x=b$ 所圍區域 R 的面積。

(3) 若 f 在 $[a,c]$ 為非負且 f 在 $[c,b]$ 為非正，則 $\int_a^b f(x)dx$ 等於(函數 f、x 軸、$x=a$ 與 $x=c$ 所圍區域 R 的面積)−(函數 f、x 軸、$x=c$ 與 $x=b$ 所圍區域 R 的面積)

例題 5. 利用幾何觀念，試求 $\int_{-1}^{2}|x|dx$。

解：

隨堂練習：利用幾何觀念，試求 $\int_0^2|2x-1|dx$。

例題 6. 利用幾何觀念，試求 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$。

解：

隨堂練習：利用幾何觀念，試求 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$。

例題 7. 利用幾何觀念，試求 $\int_0^3(x-1)dx$。

解：

隨堂練習：利用幾何觀念，試求 $\int_0^3(1-x)dx$。

定理 4.5 積分均值定理

若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 為一連續函數，則存在一數 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

註： $f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 稱為函數 f 在區間 $[a,b]$ 的平均值(average value)。

例題 8. 若 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ，試求於區間 $[-2,2]$ 內之平均值 $f(c)$ 。

解：

隨堂練習：若 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ，試求於區間 $[0,3]$ 內之平均值 $f(c)$ 。